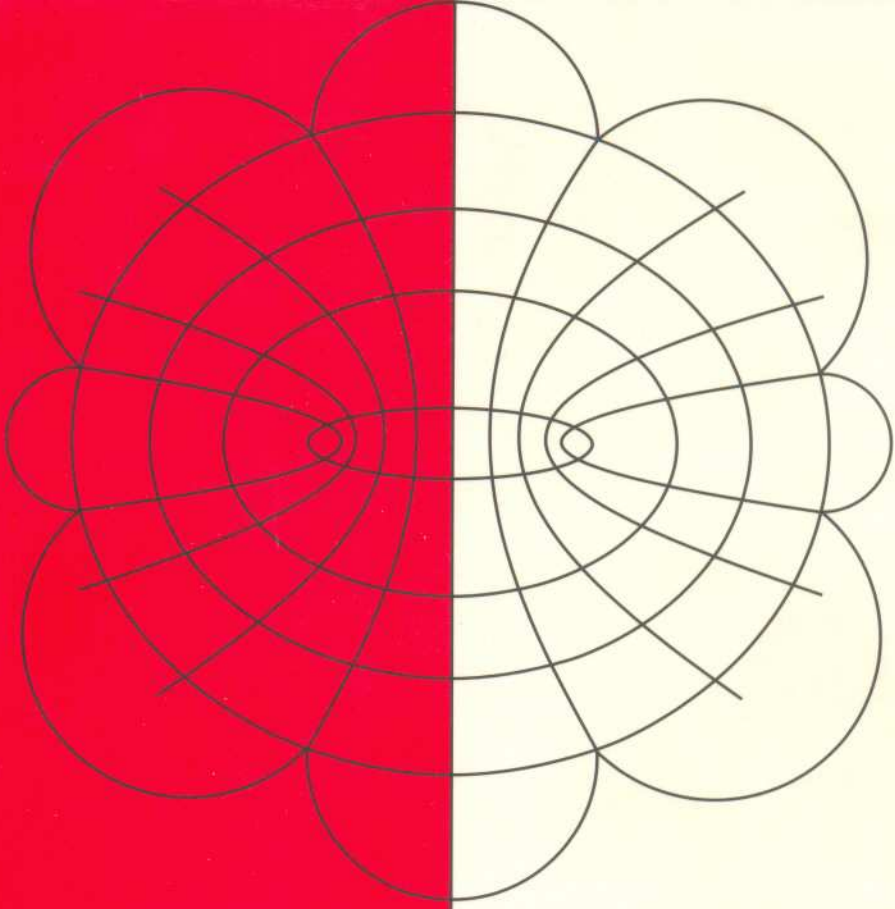
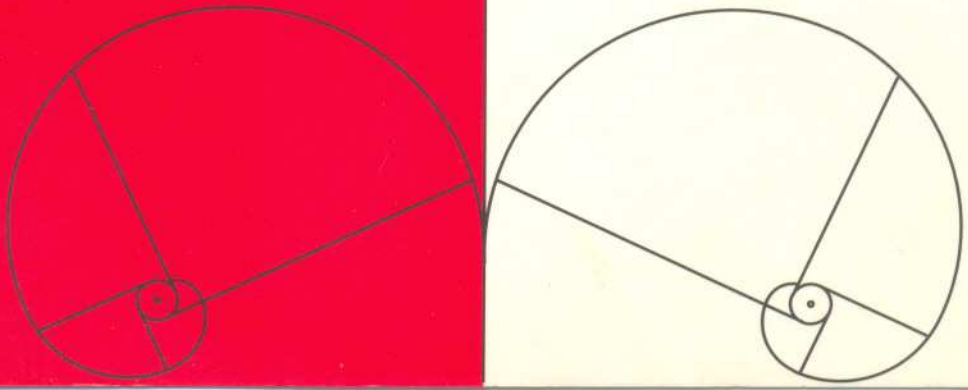


# COMBINATORIA

María Luisa Pérez Seguí

CUADERNOS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS



## UNAS PALABRAS DE LOS EDITORES

Disfrutó ese momento como ningún otro en su vida. Ahí estaba de pie, recibiendo la primera medalla de oro para un estudiante mexicano en una olimpiada internacional de matemáticas. Muchos pensamientos se arremolinaron en su cabeza. Por un momento recordó a muchos compañeros, concentraciones, ciudades, la palabra sacrificios alcanzó a asomarse ligeramente, pero no alcanzó a cristalizarse, la verdad es que había trabajado intensamente y, sin embargo, también había disfrutado, pues resolver problemas de matemáticas se había convertido en una pasión que no lo iba a abandonar nunca. Pensó en su regreso a México, en sus amigos y en su familia. También, sin saber por qué, recordó a un periodista tonto que criticó a un atleta mexicano que había obtenido un quinto lugar en los pasados juegos olímpicos, ¡cómo si eso no fuera una hazaña! Se distrajo saludando a sus compañeros de delegación...

Las olimpiadas mexicanas de matemáticas se han realizado desde 1987. Profesores, matemáticos y muchos jóvenes han dedicado esfuerzos loables por hacerlas crecer. Todos ellos comparten la afición, que en muchos casos se acerca a la adicción, y que en otros se vuelve una forma de vida, por los problemas matemáticos. El edificio que han construido ha permitido detectar y preparar a muchos de los jóvenes más talentosos para esta disciplina.

Los mejores logros que ha conseguido México son:
-trigésimo lugar en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, Corea, 2000,
-segundo lugar en las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas de Costa Rica en 1996 y de Venezuela en 2000,
-tres medallas de plata en las olimpiadas internacionales de matemáticas, ganadas por: Patricio T. Alva Pufleau (Argentina, 1997), Omar Antolín Camarena (Taiwan, 1998) y Carlos A. Villalvazo Jauregui (Corea, 2000),
-diez medallas de oro en la olimpiadas iberoamericanas de matemáticas, ganadas por: Bernardo Abrego Lerma (Argentina, 1991), Patricio T. Alva Pufleau (Costa Rica, 1996), Jesús Rodríguez Viorato (México, 1997), Roberto D. Chávez Gándara (R. Dominicana, 1998), Carlos Román Cuevas (Cuba,

1999), Javier A. Chávez Domínguez, Carlos A.Villalvazo Jauregui (ambos en Venezuela, 2000) y David J. Mireles Morales (Uruguay, 2001).

Esta serie está diseñada como material de apoyo a los jóvenes que se preparan para la olimpiada nacional de matemáticas. Nuestro deseo es que estos cuadernos sirvan como un bloque más de la pirámide que algún día tendrá en su cúspide a un joven como el que describimos al principio de esta presentación.

Queremos agradecer al Instituto de Matemáticas de la UNAM, en particular a su director, el Dr. José Antonio de la Peña Mena, por su apoyo para la publicación de estos cuadernos.

Los Editores

## Contenido

Introducción ..... i

PRIMERA PARTE

1. Principios Básicos ..... 1
2. Teorema del Binomio ..... 17
3. Comparaciones ..... 21
4. Inducción Matemática ..... 25
5. Caminos ..... 45
6. Inclusión y Exclusión ..... 49
7. Probabilidad ..... 53
8. Gráficas ..... 63
9. Principio de las Casillas ..... 69
10. Separadores ..... 75
11. Coloración ..... 79
12. Problemas Dinámicos ..... 83

SEGUNDA PARTE

13. Problemas ..... 89
14. Sugerencias ..... 99
15. Soluciones ..... 107

Lecturas Complementarias ..... 131
Glosario ..... 132

# INTRODUCCIÓN

El presente tiene el propósito de presentar de manera lo más completa posible el material de Combinatoria que le conviene conocer a un alumno en las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas (antes del Concurso Nacional), e incluso, al inicio de una preparación para olimpiadas de nivel internacional.

Una buena parte del entrenamiento consiste en que el alumno se familiarice con el lenguaje usual en las matemáticas; esto no puede obtenerse mediante innumerables (y áridas) definiciones, sino con la práctica, utilizando el lenguaje conforme se necesite. Para poder leer estas notas no se necesita conocer la terminología de Teoría de Conjuntos ni los términos que utilizan los matemáticos en sus demostraciones; la notación que aparece se explica en el momento de su aparición o es fácilmente deducible del contexto.

En la primera parte (secciones de la 1 a la 12) se desarrolla la teoría. Se incluyen numerosos ejemplos resueltos y ejercicios. El alumno deberá intentar resolver los ejemplos por sí mismo antes de ver la solución, pues sólo de esa manera podrá darse cuenta de las dificultades que se presentan al intentar un método erróneo; después deberá comparar su respuesta con la presentada aquí. La mayoría de los ejercicios que se han intercalado en esta parte son rutinarios; tienen el propósito de afianzar lo aprendido y deberán resolverse conforme aparezcan.

En la sección 1 se presenta el desarrollo básico de las técnicas de combinatoria; este material podría constituir la primera parte de un entrenamiento. Las secciones 2, 3, 4 y 5 son intermedias y constituyen una segunda parte del entrenamiento. Aunque no es un tema propiamente de Combinatoria, la sección 4 estudia Inducción Matemática; ésta es una técnica de demostración bastante útil al probar afirmaciones

sobre números enteros; en la misma sección se aprovecha la técnica estudiada para demostrar algunas fórmulas importantes de enteros. Las secciones de la 6 a la 12 contienen material más especializado; son temas interesantes que pueden resultar importantes al buscar una buena formación en combinatoria para la etapa nacional de las Olimpiadas de Matemáticas y sentar las bases para un entrenamiento más avanzado.

En la segunda parte se presenta una lista de problemas resueltos tipo Olimpiada de Matemáticas; en ellos se practican las técnicas aprendidas en la Primera Parte, pero además su resolución requiere de bastante ingenio. La sección 13 contiene los enunciados de los problemas; las secciones 14 y 15 contienen, respectivamente, sugerencias y soluciones para los problemas planteados en la sección 13. La selección presentada aquí intenta ser variada en temas y en dificultad. La mayor parte de los problemas incluidos son del dominio público o de mi propia invención (indicados con [MLPS]). He tratado, dentro de lo posible, de hacer referencia al autor del problema, así como al primer examen de olimpiadas donde apareció. Pido disculpas por cualquier omisión o error a este respecto.

Estas notas son el producto de una gran cantidad de sesiones de entrenamiento para alumnos en Olimpiadas de Matemáticas. Sus incontables e invaluables comentarios, así como muchas de las soluciones que ellos daban a los problemas han quedado incluidos aquí. Dedico a todos ellos con mucho cariño este trabajo. Agradezco a Luis Miguel García Velázquez la lectura cuidadosa y corrección de las notas, y a Gerardo Raggi Cárdenas el montaje (y enseñanza de uso) de los macros que permitieron elaborar la presentación de este trabajo.

# Primera Parte

*Sección 1*

# Principios básicos

Uno de los conceptos matemáticos abstractos más primitivos que conocemos es el de número y, dentro de los números, el de los *números naturales* o *enteros positivos*: 1, 2, 3, 4, etc. Con ellos representamos las cantidades de objetos que se nos presentan en la vida cotidiana. En esta sección desarrollaremos algunas técnicas que permiten determinar con facilidad cantidades. Comencemos por ilustrar la necesidad de aprender estas técnicas de conteo con unos ejemplos: Si se nos enseña un puñado de canicas y se nos pregunta cuántas son, un vistazo nos bastará para contarlas y dar la respuesta; sin embargo si se nos pregunta cuántas patas tienen 100 perros, en lugar de buscar los 100 animales y contarles las patas, haremos una abstracción, y la operación: $4 \times 100 = 400$ nos dirá la respuesta; utilizamos aquí una técnica muy simple de multiplicación. Desde luego hay preguntas que necesitan técnicas más elaboradas. Estudiaremos estas técnicas mediante ejemplos que iremos complicando gradualmente.

Analicemos primero con cuidado un ejemplo que a primera vista es trivial pero que nos enseña la clave básica del conteo.

**[1.1] Ejemplo.** ¿Cuántos números enteros de tres o menos cifras hay?

**Solución.** La respuesta a esta pregunta es fácil: Hay 1000 pues son todos los números enteros del 0 al 999. Esta solución no nos enseña gran cosa. Retomemos ahora el problema buscando una solución constructiva; esto es, para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$, la cantidad de números de hasta $n + 1$ cifras se puede obtener de la cantidad de números de hasta $n$ cifras: simplemente se multiplica por 10. Vamos a describir con detalle este procedimiento:

Números de a lo más una cifra hay 10, a saber, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9. Para contar los de hasta dos cifras (del 0 al 99) no necesitamos escribirlos todos; basta con observar que la primera cifra puede ser cualquiera de los 10 dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, y por cada uno de éstos hay 10 terminaciones distintas; por ejemplo, los números de dos cifras que empiezan con 4 son: $40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48$ y $49$, diez en total; lo mismo para cada una de las otras decenas. Así la cantidad de enteros entre 0 y 99 es $10 \times 10 = 100$. El siguiente paso es análogo: Para contar los números de hasta tres cifras hay que agregar un dígito (posiblemente 0) a cada uno de los 100 números de 2 o menos cifras; como hay diez posibilidades la respuesta será $10 \times 100 = 1000$. ■

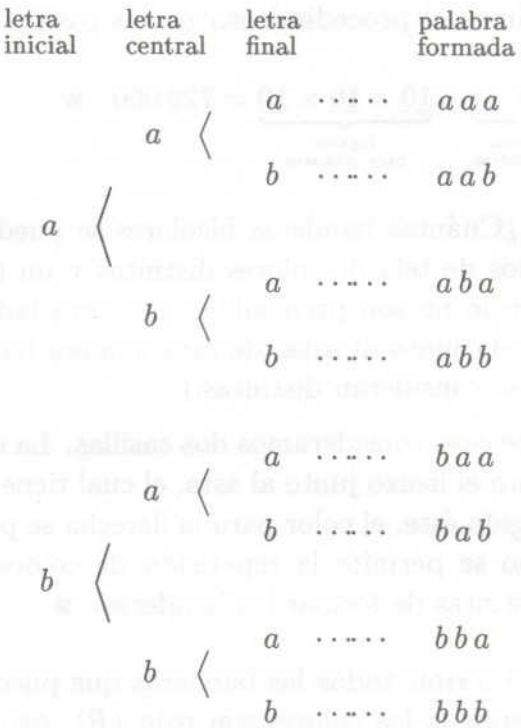
Este procedimiento de "construir sobre lo ya construido" que hemos utilizado se llama *procedimiento inductivo*. Muchas demostraciones de propiedades y fórmulas de números naturales se basan en él. En la sección 4 se estudiará esto con detalle. El principio combinatorio que manejamos en el ejemplo anterior (y que manejaremos en los siguientes) es:

**[1.2] Principio Fundamental de Conteo.** *Si una cierta tarea puede realizarse de $m$ maneras diferentes y, para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de $n$ maneras distintas, entonces las dos tareas juntas pueden realizarse (en ese orden) de $mn$ formas diferentes.*

**[1.3] Ejemplo.** ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden for-

mar si se dispone de un alfabeto con dos letras: $a$ y $b$. (Nota: Son permisibles palabras como $bba$.)

**Solución.** Procederemos como en el ejemplo anterior. En este caso conviene ilustrarlo haciendo un "diagrama árbol":




Resolvamos ahora el ejemplo utilizando nuestro Principio Fundamental de Conteo. Consideremos tres casillas: $___$, la primera para la letra inicial, la segunda para la letra central y la tercera para la letra final. En cada casilla hay dos elecciones posibles: la letra $a$ o la letra $b$. La respuesta es entonces $\underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} = 8$. El procedimiento inductivo es como sigue: En la primera casilla hay 2 posibilidades para elegir la letra. Una vez formada una palabra de una letra: $a$ o $b$, para agrandarla a una palabra de dos letras hay dos posibilidades, así que palabras de dos letras hay $2 \times 2 = 4$. Para completar cada una de éstas a una palabra de tres letras hay dos posibilidades; entonces hay

$4 \times 2 = 8$ palabras de tres letras. ■

**[1.4] Ejemplo.** ¿Cuántas placas distintas hay con dos letras a la izquierda y tres números a la derecha? (Nota: Consideraremos el alfabeto de 27 letras castellanas.

**Solución.** Seguimos el procedimiento de las casillas del ejemplo anterior:

$$\underbrace{27 \times 27}_{\substack{\text{lugares} \\ \text{para letras}}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\substack{\text{lugares} \\ \text{para números}}} = 729\,000. \quad ■$$

**[1.5] Ejemplo.** ¿Cuántas banderas bicolores se pueden formar si se dispone de 4 lienzos de tela de colores distintos y un asta? (Nota: Banderas como rojo-rojo no son permisibles; por otro lado, es importante el color que queda junto al asta, de esta manera banderas como rojo-azul y azul-rojo se consideran distintas.)

**Solución.** En este caso consideramos dos casillas. La de la izquierda, digamos, representa el lienzo junto al asta, el cual tiene 4 elecciones posibles. Una vez elegido éste, el color para la derecha se puede escoger de 3 formas (pues no se permite la repetición de colores). Así hay $4 \times 3 = 12$ formas distintas de formar las banderas. ■

**[1.6] Ejercicio.** Escribir todas las banderas que pueden formarse según el ejemplo anterior si los colores son rojo $(R)$, azul $(A)$, verde $(V)$ y blanco $(B)$.

**[1.7] Ejemplo.** Misma pregunta que en el ejemplo anterior pero ahora suponiendo que no hay asta. (En este caso no habrá distinción entre las banderas rojo-azul y azul-rojo.)

**Solución.** Para resolver este ejemplo analicemos la respuesta del ejemplo anterior. En aquél, en la colección total de las 12 banderas posibles podemos aparear cada bandera con su opuesta; por ejemplo la bandera azul-verde la apareamos con la bandera verde-azul. Cada una de las del ejemplo anterior se esta contando dos veces y, por tanto, la respuesta es $\frac{12}{2} = 6$. ■

**[1.8] Ejercicio.** En el resultado del ejercicio [1.6] aparear cada una de las banderas con su opuesta. Dar una lista de 6 banderas que ilustre la respuesta del ejemplo [1.7].

**[1.9] Ejemplo.** ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 sillas numeradas del 1 al 5?

**Solución.** En el asiento #1 se puede sentar cualquiera de las 5 personas; para cada elección de la primera persona, la segunda puede ser cualquiera de las 4 restantes; así en las dos primeras sillas el número de elecciones posibles es $5 \times 4 = 20$. Continuamos de manera análoga. Para simplificar dibujemos 5 casillas simbolizando los 5 asientos. Sobre cada casilla escribamos el número respectivo de posibilidades y multipliquemos:

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 120. \quad \blacksquare$$

Si $n$ es un número natural, el producto de todos los números naturales del 1 al $n$ aparece muy frecuentemente en problemas de combinatoria; se llama *$n$ factorial* o *factorial de $n$* y se denota por $n!$. (Así la respuesta del ejemplo [1.9] es $5! = 120$.)

Alejándose de la interpretación de $n!$ como el producto de los naturales de 1 a $n$, se define

$$0! = 1;$$

esto permite incluir el caso $n = 0$ en algunas fórmulas en las que interviene $n!$. Entonces

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 1 \times 2 = 2 \\ 3! &= 1 \times 2 \times 3 = 6 \\ 4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24. \end{aligned}$$

Es fácil darse cuenta que el número 5 del ejemplo [1.9] y el que sean personas y asientos en lugar de cualquier otra cosa no es relevante; podemos generalizarlo como sigue:

El número $P_n$ de distintas formas en que se pueden ordenar $n$ ob-

jetos es $n!$. Cada una de las listas ordenadas que se forman con los $n$ objetos se llama *permutación* (de los objetos). Tenemos entonces que el número de permutaciones de $n$ objetos es $P_n = n!$.

**[1.10] Ejemplo.** De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que cada uno visite un museo de una lista de 3 museos. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

**Solución.** Utilizando el esquema de casillas (cada una representando un museo) como arriba, tenemos que el resultado es

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 60. \ \blacksquare$$

**[1.11] Ejemplo.** De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que juntos visiten un museo (el mismo todos). ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

**Solución.** Hay que observar que la diferencia entre este ejemplo y el anterior es que no importa el orden en la elección. En el ejemplo anterior había distición entre las casillas pues cada una representaba un museo en particular distinto a los otros; en éste no hay distinción entre las casillas pues, por ejemplo, una comisión en que se haya elegido la sucesión de alumnos Ana-Beto-Carlos se considerará igual a la sucesión Beto-Carlos-Ana y también igual a la sucesión Ana-Carlos-Beto. Nuestro interés es entonces determinar en la cantidad $5 \times 4 \times 3$, en cuántas sucesiones aparece el mismo conjunto de alumnos. Para responder esto conviene plantear esta parte del ejemplo al revés: Consideremos un conjunto fijo de 3 personas, por ejemplo el formado por Ana $(A)$, Beto $(B)$ y Carlos $(C)$ y contemos de cuántas formas se pueden ordenar estos 3. Observemos que el número de formas es precisamente el número de permutaciones de las 3 personas, o sea, $P_3 = 3! = 6$. Entonces cada grupo de 3 personas se está contando 6 veces en el producto $5 \times 4 \times 3$, así que la respuesta al ejemplo será

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10. \ \blacksquare$$

**[1.12] Ejercicio.** En los ejemplos [1.10] y [1.11] supongamos que el grupo de los 5 alumnos está formado por Ana $(A)$, Beto $(B)$, Carlos $(C)$, Daniel $(D)$ y Elena $(E)$. Hacer la lista de los 60 arreglos de estos alumnos en los que se elige 3 para visitar museos distintos, agrupando en esa lista las colecciones que resultan iguales si todos van a un mismo museo.

En el ejemplo anterior aprendimos el siguiente principio:

El número de colecciones (en las que el orden no importa) con $r$ elementos que se pueden seleccionar dentro de un conjunto de $n$ elementos $(n \geq r \geq 1)$ es

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(r-1))}{r!}. \tag{1.13}$$

Este número recibe el nombre de *combinaciones* de $n$ en $r$ y se denota por $\binom{n}{r}$. Dicho de otra manera, el número de subconjuntos de $r$ elementos que tiene un conjunto con $n$ elementos es $\binom{n}{r}$. (En el ejemplo [1.11], $n = 5$ y $r = 3$ y la respuesta es $\binom{5}{3}$.) Nótese que la fórmula [1.13] no tiene sentido para $n = 0$; sin embargo sí tiene sentido hablar del número de subconjuntos con 0 elementos dentro de un conjunto con $n$ elementos; sabemos que este número es 1 pues sólo hay un conjunto sin elementos que es el llamado conjunto vacío. Definimos entonces

$$\binom{n}{0} = 1.$$

**[1.14] Ejercicio.** Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$. Escribir todos los subconjuntos de $X$ con

i) 0 elementos,
ii) 1 elemento,
iii) 2 elementos,
iv) 3 elementos,
v) 4 elementos y
vi) 5 elementos.

Verificar que en cada caso el número de subconjuntos obtenido sea $\binom{5}{r}$ y que el número total de subconjuntos sea $2^5 = 32$. (Ver ejercicio [2.6] y ejemplo [3.2]).

**[1.15] Ejercicio.** Basándose en la interpretación de $\binom{n}{r}$ como el número de subconjuntos de $r$ elementos dentro de un conjunto con $n$ elementos, explicar porqué

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

**[1.16] Ejercicio.** Calcular $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{5}{5}$ y $\binom{9}{4}$.

Con la intención de simplificar la fórmula [1.13] sobre las combinaciones de $n$ en $r$, observemos que, para $1 \leq r \leq n-1$, el numerador se puede "completar" a $n!$ multiplicando por $(n-r)!$; si lo "completamos" deberemos compensar dividiendo también por $(n-r)!$. Tendremos entonces que para $r = 1, 2, \ldots, n-1$,

[1.17]
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Recordemos que se ha definido $0! = 1$ y $\binom{n}{0} = 1$; notemos entonces que si sustituimos $r = 0$ (y, posiblemente también $n = 0$) en el lado derecho de la fórmula [1.17] obtendremos $\frac{n!}{0!n!} = 1$. De la misma manera, al sustituir $r = n$ obtendremos $\frac{n!}{n!0!} = 1$. Así, también en estos casos extremos vale la fórmula [1.17].

**[1.18] Ejercicio.** Volver a hacer los ejercicios [1.15] y [1.16] utilizando la fórmula [1.17].

**[1.19] Ejemplo.** De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

**Solución.** La elección de las 2 niñas se puede hacer de $\binom{15}{2} = \frac{15\times14}{2!} = 105$ formas. Como deben ser 5 en total y debe haber 2 niñas exactamente, entonces los niños serán 3; éstos se pueden escoger de $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3!} = 120$ formas. Por tanto el resultado es $105 \times 120 = 12\,600$. ■

Como hemos visto, al determinar cantidades buscamos simplificar nuestras cuentas utilizando "homogeneidades" en el problema. Con este propósito, en algunas ocasiones es conveniente dividir en casos de manera que en cada uno de ellos haya homogeneidad, y después sumar las respuestas. Un ejemplo muy simple de esto sería el siguiente: Si tenemos 4 paquetes de 100 hojas de papel y otros 3 paquetes de 200 hojas cada uno, entonces el número total de hojas que tenemos es

$$4 \times 100 + 3 \times 200 = 1000.$$

Comparemos el siguiente ejemplo con el anterior, tomando en cuenta la búsqueda de homogeneidades, como acabamos de decir.

**[1.20] Ejemplo.** De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga a lo más 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

**Solución.** Vamos a resolver este ejemplo como el anterior pero separando por casos y después sumando las respuestas de cada uno de los casos.

*Caso 1*: Que la colección tenga 2 niñas exactamente: $\binom{15}{2}\binom{10}{3} = 12\,600$.

*Caso 2*: Que la colección tenga exactamente 1 niña: $\binom{15}{1}\binom{10}{4} = 3\,150$.

*Caso 3*: Que la colección no tenga niñas: $\binom{15}{0}\binom{10}{5} = 252$.

La respuesta al ejemplo es $12\,600 + 3\,150 + 252 = 16\,002$. ■

**[1.21] Ejemplo.** Un grupo de 15 personas quiere dividirse en 3 equipos de 5 personas cada uno. Cada uno tendrá una labor específica

distinta a las demás. ¿De cuántas formas distintas es posible hacer la distribución?

**Solución.** Escojamos uno por uno los equipos. La elección del primer equipo puede hacerse de $\binom{15}{5} = 3\,003$ formas; para elegir el segundo equipo ya sólo habrá 10 personas de dónde escoger, por tanto éste se podrá elegir de $\binom{10}{5} = 252$ formas. El tercer equipo quedará formado automáticamente con la elección de los otros dos. Entonces el número de formas de hacer la elección sucesiva es $3\,003 \times 252 \times 1 = 756\,756$. ■

**[1.22] Ejemplo.** Un grupo de 15 personas quiere dividirse en 3 equipos de 5 personas cada uno. Todos los equipos tendrán la misma labor. ¿De cuántas formas es posible hacer la distribución?

**Solución.** En este caso no hay distinción entre los equipos así que hay que dividir el resultado del ejemplo anterior entre 3!, que es el número de permutaciones de los equipos. La respuesta es entonces $126\,126$. ■

**[1.23] Ejemplo.** En una bolsa hay 3 pelotas rojas y 2 azules. Se quiere formar una fila con todas ellas. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar la fila?

**Solución.** *Primera forma.* Consideremos todas las permutaciones de las 5 pelotas y contemos cuántas de esas permutaciones son indistinguibles entre sí. Las permutaciones de las 5 pelotas sabemos que son $5! = 120$. En cualquiera de las permutaciones fijémonos en la ubicación de las pelotas rojas; por ejemplo $-\ roja\ -\ roja\ roja$. Éstas pueden revolverse entre sí (3! veces) formando colecciones indistinguibles, y lo mismo ocurre con las del otro color. Vamos a explicar lo anterior con más detalle: Denotemos las pelotas rojas por $R_1$, $R_2$ y $R_3$, y las azules por $A_1$ y $A_2$. Entonces las siguientes listas (en las que se han permutado las rojas pero se han dejado fijas las azules) representan la misma colección:

$$\left.\begin{array}{ccccc} A_1 & R_1 & A_2 & R_2 & R_3 \\ A_1 & R_1 & A_2 & R_3 & R_2 \\ A_1 & R_2 & A_2 & R_1 & R_3 \\ A_1 & R_2 & A_2 & R_3 & R_1 \\ A_1 & R_3 & A_2 & R_1 & R_2 \\ A_1 & R_3 & A_2 & R_2 & R_1 \end{array}\right\} 3!.$$

En cada una de ellas también se pueden revolver las azules entre sí (2! permutaciones). Entonces al considerar las permutaciones de las 5 pelotas, cada arreglo se está contando $3! \times 2! = 12$ veces en lugar de 1. La respuesta al ejemplo es pues $\frac{5!}{3!2!} = 10$.

*Segunda forma.* Primero podemos contar las posibilidades para colocar las pelotas rojas en los 5 lugares disponibles; esto nos dará la elección de 3 lugares, que puede hacerse de $\binom{5}{3} = 10$ maneras. Para colocar las 2 azules ya sólo sobran 2 lugares así que esto se puede hacer de $\binom{2}{2} = 1$ forma. El resultado es $10 \times 1 = 10$. ■

**[1.24] Ejercicio.** Escríbanse las 10 filas distintas que se pueden formar con las pelotas en el ejemplo [1.23].

**[1.25] Ejemplo.** En una bolsa hay 3 pelotas rojas y 2 azules. ¿Cuántas filas distintas de 3 pelotas se pueden formar?

**Solución.** Como son 5 pelotas en total pero sólo se van a considerar filas de 3, hay que dejar dos pelotas sin colocar. Consideraremos los distintos casos por separado y después sumaremos las respuestas parciales. Si las dos pelotas que quedan fuera son rojas, hay $\frac{3!}{1!2!} = 3$ arreglos con las restantes. Análogamente hay $\frac{3!}{3!} = 1$ fila que deja las 2 pelotas azules fuera, y $\frac{3!}{2!1!} = 3$ filas que dejan una azul y una roja fuera. La respuesta al ejemplo es $3 + 1 + 3 = 7$. ■

**[1.26] Ejercicio.** Escribir los 7 arreglos de pelotas del ejemplo [1.25].

En algunas ocasiones, para poder hacer bien las cuentas, nuestra búsqueda de homogeneidad nos lleva a que es más fácil contar lo opuesto

de lo que queremos y después restar de un total. Ilustramos esto con el siguiente ejemplo.

**[1.27] Ejemplo.** ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 3 cuadernos rojos, 4 azules y 2 verdes, si los verdes no deben quedar juntos?

**Solución.** Conviene contar primero todas las ordenaciones posibles y después restar aquéllas en las que los verdes quedan juntos. El número total de filas (incluyendo aquéllas en que los verdes quedan juntos es $\frac{9!}{3!4!2!} = 1260$. Para contar las que tienen juntos los cuadernos verdes pensemos éstos como pegados formando un solo cuaderno; ahora determinemos el número de arreglos con 3 cuadernos rojos, 4 azules y 1 verde; éste es $\frac{8!}{3!4!} = 280$. La respuesta al ejemplo es $1260-280 = 980$. ■

Los ejemplos siguientes se refieren a la *baraja* usual de *pókar*: Cada carta tiene un símbolo llamado *número* que puede ser cualquiera de los 13 símbolos siguientes: $A$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $J$, $Q$ o $K$, y otro símbolo llamado *palo* que puede ser cualquiera de los 4 siguientes: ♠ *(espada)*, ♡ *(corazón)*, ◇ *(diamante)* o ♣ *(trébol)*. Todos los palos se combinan con todos los números para formar la baraja completa con $13 \times 4 = 52$ cartas como se ilustra a continuación:

$$\begin{array}{cccccccccccc} A^{\heartsuit} & 2^{\heartsuit} & 3^{\heartsuit} & 4^{\heartsuit} & 5^{\heartsuit} & 6^{\heartsuit} & 7^{\heartsuit} & 8^{\heartsuit} & 9^{\heartsuit} & 10^{\heartsuit} & J^{\heartsuit} & Q^{\heartsuit} & K^{\heartsuit} \\ A^{\diamondsuit} & 2^{\diamondsuit} & 3^{\diamondsuit} & 4^{\diamondsuit} & 5^{\diamondsuit} & 6^{\diamondsuit} & 7^{\diamondsuit} & 8^{\diamondsuit} & 9^{\diamondsuit} & 10^{\diamondsuit} & J^{\diamondsuit} & Q^{\diamondsuit} & K^{\diamondsuit} \\ A^{\spadesuit} & 2^{\spadesuit} & 3^{\spadesuit} & 4^{\spadesuit} & 5^{\spadesuit} & 6^{\spadesuit} & 7^{\spadesuit} & 8^{\spadesuit} & 9^{\spadesuit} & 10^{\spadesuit} & J^{\spadesuit} & Q^{\spadesuit} & K^{\spadesuit} \\ A^{\clubsuit} & 2^{\clubsuit} & 3^{\clubsuit} & 4^{\clubsuit} & 5^{\clubsuit} & 6^{\clubsuit} & 7^{\clubsuit} & 8^{\clubsuit} & 9^{\clubsuit} & 10^{\clubsuit} & J^{\clubsuit} & Q^{\clubsuit} & K^{\clubsuit} \end{array}$$

Se llama *mano de pókar* cualquier colección de 5 cartas de la baraja. La siguiente nomenclatura es usual:

*par*: dos cartas del mismo número.
*tercia*: tres cartas del mismo número.
*pókar*: cuatro cartas del mismo número.
*full*: una tercia y un par.
*flor*: cinco cartas del mismo palo.

*corrida*: cinco cartas con numeración consecutiva (según el orden en que se escribieron arriba, pero permitiendo $A$ también como número final, en seguida de $K$).

Observemos que el número total de manos de pókar es $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

**[1.28] Ejemplo.** ¿Cuántas manos de pókar tienen tercia exactamente (es decir, que no sea full ni pókar).

**Solución.** *Primera forma.* Ponemos 5 casillas: las tres primeras para la tercia y las otras dos para las otras cartas. La primera carta se puede escoger arbitrariamente; la segunda sólo tiene 3 posibilidades pues debe tener el mismo número que la primera; la tercera ya sólo puede ser elegida de 2 maneras distintas; como no importa el orden de estas 3 cartas, este número deberá dividirse entre 3!. La cuarta carta se debe escoger dentro de las 48 que son de número distinto al de la tercia. Para la quinta carta ya sólo sobran 44 cartas pues el número debe ser también distinto. La cuarta y quinta pueden haberse escogido en cualquier orden por lo que se deberá dividir entre 2!.

$$\underbrace{\frac{52 \times 3 \times 2}{3!}}_{\text{tercia}} \times \underbrace{\frac{48 \times 44}{2!}}_{\text{cartas distintas}} = 54\,912.$$

*Segunda forma.* También formamos primero la tercia pero eligiendo antes el número que le corresponderá: Tenemos 13 números para escoger y, una vez escogido el número, las 3 cartas que forman la tercia deben escogerse dentro de 4 posibles; entonces el número de tercias es $13\binom{4}{3}$. Para escoger las otras dos cartas utilizando este mismo método razonamos como sigue: Hay que escoger 2 números (pues queremos que las otras 2 cartas sean de números distintos) dentro de los 12 que sobran; esta elección se puede hacer entonces de $\binom{12}{2}$ formas. En cada uno de estos números que se hayan elegido hay que escoger 1 carta, cosa que puede hacerse de $\binom{4}{1}$ formas. El resultado escrito en esta forma es

$$13\binom{4}{3} \times \binom{12}{2}\binom{4}{1}^2,$$

que, desde luego, también es igual a 54 912. ■

**[1.29] Ejemplo.** ¿Cuántas manos de pókar tienen dos pares (distintos) exactamente?

**Solución.** Procedemos como en el ejemplo [1.28].

*Primera forma.*

$$\frac{\overbrace{\underline{52}\times\underline{3}}^{1^{er}\text{ par}}\overbrace{\underline{48}\times\underline{3}}^{2^{o}\text{ par}}}{\underline{2!}\quad\underline{2!}\quad 2!}\times 44 = 123\,552.$$

(Nota: Hay que dividir entre 2! porque no importa el orden entre los dos pares.)

*Segunda forma.*

$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\times 44 = 123\,552. \blacksquare$$

**[1.30] Ejemplo.** ¿Cuántas manos de pókar tienen corrida?

**Solución.** El número más bajo de la corrida puede ser cualquiera de los siguientes: $A$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10, que son 10 posibilidades. Pongamos 5 casillas; la primera casilla será para la carta de número menor, la siguiente casilla será para el siguiente número, y así sucesivamente hasta la quinta casilla que será para la carta con el número mayor. Una vez escogido el número menor para la corrida, todos los demás números quedan determinados y lo único que falta escoger es el palo. Entonces la cantidad de corridas es $10\times4\times4\times4\times4\times4 = 10\,240$. ■

## Ejercicios

**[1.31]** ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 8 personas alrededor de una mesa redonda? (Nota: Dos distribuciones se considerarán iguales si una se puede obtener de la otra mediante un giro.)

**[1.32]** ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 personas en una fila de 8 asientos numerados del 1 al 8?

**[1.33]** ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de $n$ lados?

**[1.34]** Probar la *Fórmula de Pascal*:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1},$$

para $r$ y $n$ números enteros con $0 \leq r < n$.

**[1.35]** El *Triángulo de Pascal* está definido como el triángulo de números en el que el renglón número $n$ aparecen los $n+1$ números

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Se muestran a continuación los primeros 4 renglones del Triángulo de Pascal. Utilizar la fórmula del ejercicio anterior para construir los 10 primeros renglones.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 4 & & 6 & & 4 & \end{array} \quad 1$$

**[1.36]** De un grupo de 24 personas se quiere elegir 5 representantes de la siguiente forma: Pedro y Luis deben estar en el grupo elegido. Hay 8 mujeres en total pero a lo más deben figurar 2 en el grupo. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse la elección?

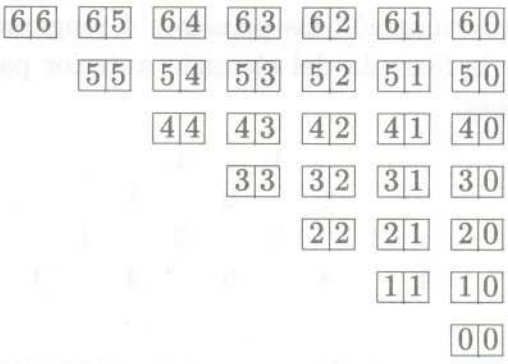
**[1.37]** De un grupo de 30 socios de un club se quiere elegir una mesa directiva con un presidente, un secretario y 3 equipos de 2 personas cada uno. ¿Cuántas mesas directivas distintas se pueden formar?

**[1.38]** ¿Cuántas palabras distintas se pueden escribir revolviendo las letras de la palabra *MATEMATICA*?

**[1.39]** De un conjunto de 10 botes de distintos colores se quiere escoger 5 de tal manera que 3 sean para dulces y 2 sean para chocolates. ¿De cuántas formas distintas es posible hacer la elección?

**[1.40]** Se dispone de una colección de 30 pelotas divididas en 5 tamaños distintos y 6 colores diferentes de tal manera que en cada tamaño hay los 6 colores. ¿Cuántas colecciones de 4 pelotas tienen exactamente 2 pares de pelotas del mismo tamaño (que no sean las 4 del mismo tamaño)?

*El siguiente problema se refiere al conjunto usual de 28 fichas de dominó en que cada ficha muestra dos números de la colección* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *y* 6 *(posiblemente repetidos), como esquematizamos a continuación:*




Se llaman *fichas dobles* aquéllas en que los dos números mostrados son iguales. Se llama *mano de dominó* cualquier colección de 7 de las 28 fichas. Nótese que el número total de manos de dominó es $\binom{28}{7} = 1\,184\,040$.

**[1.41]** ¿Cuántas manos de dominó tienen por lo menos 2 fichas dobles?

*Sección 2*

# Teorema del Binomio

El siguiente es un resultado muy importante en aritmética. Lo probaremos aquí utilizando algunas de las técnicas de combinatoria que hemos aprendido. Más adelante volveremos a probarlo usando el método de inducción.

**[2.1] Teorema del Binomio de Newton.** Sean $a$ y $b$ números arbitrarios y sea $n$ un número natural. Entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

**Demostración.** La expresión $(a+b)^n$ significa que tenemos que multiplicar $a+b$ consigo mismo $n$ veces. Entonces, al desarrollar todo el producto, los términos que obtenemos están dados por todas las posibles elecciones de los números $a$ o $b$ en cada uno de los $n$ factores (por ejemplo, $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$). Observemos entonces que los términos obtenidos son de la forma $a^s b^r$, con $0 \leq s, r \leq n$ y

$s + r = n$, es decir, $s = n - r$. Ahora notemos que $a^{n-r}b^r$ aparece cada vez que se eligió $b$ en $r$ de los factores y $a$ en el resto, así que el número de veces que aparece este término es $\binom{n}{r}$. Al agrupar términos semejantes tenemos la fórmula deseada. ■

Como hemos visto, los números $\binom{n}{r}$ (para $0 \leq r \leq n$) aparecen como coeficientes en la expansión de un binomio elevado a la potencia $n$; por esta razón reciben el nombre de *coeficientes binomiales*. En los ejercicios [1.34] y [1.35] vimos que para una $n$ elegida no muy grande podemos obtener fácilmente los coeficientes binomiales sin recurrir en cada caso a la fórmula $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

**[2.2] Ejemplo.** Desarrollar $(2x - y)^5$.

**Solución.** Sustituimos $a = 2x$ y $b = -y$ en la Fórmula del Binomio:

$$\begin{aligned}(2x-y)^5 &= \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(-y) + \binom{5}{2}(2x)^3(-y)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}(2x)^2(-y)^3 + \binom{5}{4}(2x)(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 \\ &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-y) + 10(2x)^3(-y)^2 \\ &\quad + 10(2x)^2(-y)^3 + 5(2x)(-y)^4 + (-y)^5 \\ &= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5. \ ■\end{aligned}$$

## Ejercicios

**[2.3]** Utilizar el Teorema del Binomio y el Triángulo de Pascal (ver ejercicios [1.34] y [1.35]) para desarrollar la expresión $(2a - 3b^2)^8$.

**[2.4]** Utilizar el Teorema del Binomio para desarrollar la expresión $(a + 2b - \frac{c}{2})^4$.

**[2.5]** Encontrar el coeficiente del término $a^7b^4ce^2$ en el desarrollo

de $(a+b+c+d+e)^{14}$. *Sugerencia:* Proceder como en la prueba del Teorema del Binomio.

**[2.6]** Utilizar el Teorema del Binomio para probar la fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

(Comparar con el ejemplo [3.2].)

**[2.7]** Utilizar el Teorema del Binomio para probar la fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}\cdots.$$

¿Qué interpretación se puede dar a esta fórmula en términos de subconjuntos de un conjunto?

**[2.8]** Probar que para cualquier número natural se tiene la fórmula

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

*Sugerencia:* Examinar el coeficiente de $x^n$ al desarrollar ambos miembros de la igualdad $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$. (Comparar con el ejercicio [5.3].)

**[2.9]** Encontrar el término que no contiene a $x$ en el desarrollo de

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9.$$

*Sección 3*

# Comparaciones

Hemos visto ya que para simplificar muchos problemas de combinatoria, es importante la interpretación que se da a lo que se quiere contar. De esta manera hemos visto la utilidad de hacer conteos indirectos. Ejemplos de esto los tuvimos gradualmente en [1.7] y [1.11], que nos llevaron al desarrollo general

$$\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(r-1))}{r!}.$$

Vimos en esa ocasión que convenía contar arreglos en orden ($n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(r-1))$) y después identificar aquéllos que se hubieran repetido ($r!$). Esta idea de comparar o de contar en forma indirecta está implícita en muchos conteos (ver también, por ejemplo, el ejercicio [1.15], o más adelante, el Principio de Inclusión y Exclusión). En esta sección veremos algunos ejemplos en los que el contar de dos maneras diferentes lo mismo nos conduce a obtener ciertas fórmulas en combinatoria (que a su vez pueden usarse para resolver otros problemas).

**[3.1] Ejemplo.** Probar la *fórmula de Gauss*

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

**Solución.** Contaremos las colecciones de 2 elementos que pueden escogerse dentro de un conjunto de $n+1$ elementos de dos maneras diferentes. La comparación de los dos resultados nos demostrará la veracidad de la fórmula. Consideremos así el conjunto $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\}$. Pongamos los subconjuntos de $X$ que tienen dos elementos en una lista, como sigue:

$$\begin{array}{llll} \{x_1,x_2\}, & \{x_1,x_3\}, & \{x_1,x_4\}, & \cdots \quad \{x_1,x_{n+1}\}, \\ & \{x_2,x_3\}, & \{x_2,x_4\}, & \cdots \quad \{x_2,x_{n+1}\}, \\ & & \{x_3,x_4\}, & \cdots \quad \{x_3,x_{n+1}\}, \\ & & & \vdots \\ & & & \{x_{n-1},x_{n+1}\}. \end{array}$$

De esta lista es fácil observar que el número de subconjuntos de $X$ con 2 elementos es precisamente lo que aparece del lado izquierdo en la igualdad que queremos probar. Por otro lado, sabemos que el número de subconjuntos de 2 elementos que tiene un conjunto con $n+1$ elementos es $\binom{n+1}{2}$, que es precisamente lo que aparece en el miembro derecho de la igualdad, y así queda completa la demostración. ■

**[3.2] Ejemplo.** Probar la fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

**Solución.** Probaremos que cada uno de los miembros de la igualdad en la fórmula cuenta el número de subconjuntos que tiene un conjunto de $n$ elementos. Esto es claro para el miembro izquierdo (ver ejercicio [1.14]). Para probar que también el miembro derecho representa lo mismo, una vez más, contemos otra cosa que es equivalente:

el número de sucesiones de longitud $n$ que se pueden formar con dos símbolos $S$ y $N$, es decir el número de "palabras" de $n$ letras que pueden formarse con los símbolos $S$ y $N$. Obviamente, este número es $2^n$, que es el miembro derecho de la igualdad buscada, así que, para completar nuestra prueba, bastará que probemos que el número de sucesiones mencionado es también el número de subconjuntos. Para lograrlo, establezcamos una correspondencia entre las sucesiones y los subconjuntos de manera que cada sucesión represente un subconjunto y viceversa. Esto lo podemos hacer observando que para determinar un subconjunto hay que ir tomando uno a uno los elementos del conjunto total, e ir diciendo si el elemento pertenece ($S$) o no ($N$) al subconjunto. Para que esto quede más claro, ilustremos el "apareo" de sucesiones con subconjuntos en el caso del conjunto $X = \{a, b, c\}$ $(n = 3)$:

$$\begin{aligned} \{a, b, c\} &\leftrightarrow SSS \\ \{a, b\} &\leftrightarrow SSN \\ \{a, c\} &\leftrightarrow SNS \\ \{b, c\} &\leftrightarrow NSS \\ \{a\} &\leftrightarrow SNN \\ \{b\} &\leftrightarrow NSN \\ \{c\} &\leftrightarrow NNS \\ \{\,\} &\leftrightarrow NNN. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Es interesante también notar que en el ejemplo anterior, al probar que el número de subconjuntos de un conjunto con $n$ elementos es $2^n$, establecimos una comparación (en este caso, *correspondencia uno a uno*) entre los subconjuntos y las sucesiones de longitud $n$ que constan de los símbolos $S$ y $N$.

## Ejercicios

**[3.3]** Probar que si $m$, $n$ y $r$ son naturales con $0 \leq r \leq m, n$,

entonces

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

**[3.4]** Contar el número de ternas de números del 1 al $n$ ($n$ natural) que están en orden creciente de dos maneras distintas para probar la fórmula

$$\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}.$$

(Ver [4.27].)

*Sección 4*

# Inducción Matemática

La *inducción matemática* es un método muy útil en algunas demostraciones. Se emplea generalmente al probar fórmulas o propiedades de números naturales. En esta sección, además de ilustrar ampliamente el método de demostración por inducción, lo aprovecharemos para probar algunas fórmulas y propiedades de números enteros que son útiles en Matemáticas. Empecemos con un ejemplo sencillo para ilustrar el método.

**[4.1] Ejemplo.** Analicemos la sucesión (lista) de números $n^2 + n$ para $n$ natural. El primer término de nuestra lista es 2, pues cuando $n = 1$, $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$; el segundo término es 6 ya que $2^2 + 2 = 6$. Así obtenemos la sucesión:

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, \ldots$$

Podemos notar que todos los términos que escribimos son pares. ¿Será cierto que todos los términos de la sucesión son pares? La respuesta es *sí*. Podemos probar esto directamente (sin usar inducción matemática),

observando que para cualquier natural $n$, el número $n^2 + n$ se puede escribir como $n(n+1)$, o sea que todos los términos de la sucesión son el producto de dos enteros consecutivos y, como uno de los dos enteros debe ser par, el producto también lo será.

Más abajo haremos otra demostración del mismo resultado (es decir, de que todos los términos de la sucesión son pares) utilizando el método de inducción, pero primero hablemos un poco sobre el procedimiento que seguiremos:

Notemos que con la sola proposición: "Para cualquier natural $n$, el número $n^2 + n$ es par", estamos abarcando una infinidad de proposiciones (una para cada $n$): $1^2 + 1$ es par, $2^2 + 2$ es par, $3^2 + 3$ es par, etc. Si tratamos de probar cada una individualmente no llegaremos muy lejos; en cambio, si probamos

$(I_1)$ que la primera proposición es cierta y

$(I_2)$ que, cada vez que todas las proposiciones anteriores a una fija $P$ sean verdaderas también lo es la misma $P$,

entonces podemos concluir que todas las proposiciones son ciertas. En efecto, comprobemos por ejemplo que de nuestro método de demostración (probando $(I_1)$ e $(I_2)$) se deduce que la $4^a$ proposición es cierta: La $1^a$ proposición es cierta por $(I_1)$; utilizando esto tenemos que, por $(I_2)$, la $2^a$ proposición también es cierta; pero entonces, al tener que la primera y la segunda afirmaciones son ciertas, por $(I_2)$ deducimos que la $3^a$ proposición es verdadera; ahora ya tendemos que la primera, la segunda y la tercera son ciertas así que, otra vez usando $(I_2)$ concluimos que la $4^a$ proposición también es válida.

Así como llegamos a la $4^a$ proposición, a cualquier proposición podemos llegar en un *número finito* de pasos, así que, con sólo demostrar $(I_1)$ e $(I_2)$, podemos afirmar que todas las proposiciones son verdaderas.

$$1^a \text{ proposición cierta} \Rightarrow \begin{cases} 1^a \text{ proposición cierta} \\ 2^a \text{ proposición cierta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^a \text{ proposición cierta} \\ 2^a \text{ proposición cierta} \\ 3^a \text{ proposición cierta} \end{cases} \Rightarrow \cdots$$

Probemos entonces $(I_1)$ e $(I_2)$ en nuestra situación particular, esto es, para probar la afirmación: Para todo natural $n$, el número $n^2 + n$

es par.

*Demostración de* $(I_1)$. $1^2 + 1 = 2$, que es par.

*Demostración de* $(I_2)$. Supongamos que $k \geq 2$ y que todas las afirmaciones desde la primera hasta la $k$-ésima (es decir, la que se encuentra en el lugar $k$) son verdaderas. Queremos utilizar esta suposición para probar que, en este caso, también será verdadera la $(k+1)$-ésima. De hecho en nuestra demostración utilizaremos sólo la validez de la $k$-ésima (es decir, no requeriremos utilizar toda la fuerza de nuestra suposición). El que la $k$-ésima afirmación sea cierta nos dice que tomamos como verdadero el que $k^2 + k$ sea par y queremos usar esto para probar que $(k+1)^2 + (k+1)$ también es par. Desarrollemos la expresión $(k+1)^2 + (k+1)$ para poder compararla con $k^2 + k$:

$$(k+1)^2+(k+1) = k^2+2k+1+k+1 = (k^2+k)+2k+2 = (k^2+k)+2(k+1).$$

De esta manera hemos logrado expresar $(k+1)^2 + (k+1)$ como suma de dos números pares, a saber $k^2 + k$ (que estamos suponiendo es par) y $2(k+1)$ (que es par por tener el número 2 como factor). Como la suma de números pares también es par, $(k+1)^2 + (k+1)$ es par, como queríamos probar. Esto termina la demostración de $(I_2)$.

Puesto que $(I_1)$ e $(I_2)$ quedaron probadas en nuestro caso, concluimos que para todo número natural $n$, el número $n^2 + n$ es par. ■

Nótese que en el método de inducción se necesita un punto de partida: demostrar que una primera afirmación es verdadera; en algunos casos, como veremos más adelante (ver ejemplo [4.11]), el punto de partida deberá abarcar más de una afirmación puesto que de alguna manera se utilizará dentro de la demostración de $(I_2)$ el que haya un número determinado de proposiciones ya demostradas. A ese punto de partida le llamaremos *base de la inducción* o, en forma abreviada, *BI*. La suposición de que todas las proposiciones anteriores a una dada son verdaderas se llama *hipótesis de inducción* o *HI*. Como vimos en el ejemplo, en algunas ocasiones, basta con que la proposición anterior a una dada sea cierta para que la proposición dada también lo sea; en estos casos la hipótesis de inducción puede simplificarse. La práctica nos dirá qué tan fuerte necesitamos hacer nuestra hipótesis de inducción y

cuántas afirmaciones deberán tomarse como base de inducción.

Una forma de ilustrar porqué el método de inducción proporciona una demostración correcta de algunas proposiciones es la siguiente: Supongamos que se tiene una hilera de fichas de dominó colocadas de manera tal que cada vez que una caiga empujará a la siguiente para que también caiga (esto corresponde a $(I_2)$); si una persona empuja la primera ficha (corresponde a $(I_1)$), podremos afirmar que cada una de las fichas deberá caer en algún momento.

En $(I_2)$, la forma en que uno hace ver cómo la validez de una proposición (o varias proposiciones) "empuja(n)" la validez de la siguiente depende del problema particular de que se trate; en algunos casos la demostración puede ser muy sencilla y en otros muy complicada.

Por otro lado, el que una persona no pueda demostrar satisfactoriamente un resultado por inducción, no quiere decir nada sobre la validez del resultado; puede ser simplemente que la sucesión de afirmaciones no tenga una liga tal que la validez de cada afirmación "empuje" la validez de la siguiente. Siguiendo la analogía de las fichas de dominó podríamos proponer un ejemplo en que las fichas de dominó estuvieran alejadas entre sí pero que de todas maneras se cayeran por otra razón (por ejemplo porque colocáramos un ventilador con suficiente fuerza enfrente de ellas). También la práctica nos dirá en qué tipo de proposiciones podemos intentar hacer una demostración por inducción y en cuáles no.

Es importante también aclarar que la hipótesis de inducción debe abarcar la base de inducción; es decir, la primera afirmación que se suponga verdadera en la hipótesis de inducción debe haber quedado demostrada independientemente en la base. También es importante hacer notar que en cualquier demostración por inducción hay un *paso comparativo* en el que se establece la relación o liga que existe entre una afirmación y la(s) precedente(s).

En resumen, para hacer una demostración por el método de inducción matemática se deberán seguir los siguientes tres pasos.

*Primer paso. Identificar la sucesión de proposiciones que abarca la proposición general que se va a demostrar.*

*Segundo paso. Identificar y probar la base de inducción.*

*Tercer paso. Hacer una hipótesis de inducción (suposición de que todas las proposiciones que preceden a una proposición fija son verdaderas) abarcando la base de inducción y utilizar esa suposición (o parte de ella), para probar que la proposición fija también es cierta. (Para ello debe haberse hecho una comparación entre la afirmación fija que se va a demostrar y la(s) anterior(es)).*

Aplicaremos estos tres pasos en los siguientes ejemplos.

**[4.2] Ejemplo.** Demostrar que para $n = 4, 5, 6, \ldots$, se tiene que $2^n < n!$.

**Solución.** La sucesión de proposiciones es:

$1^a$ proposición: $2^4 < 4!$.
$2^a$ proposición: $2^5 < 5!$.
$3^a$ proposición: $2^6 < 6!$.
$4^a$ proposición: $2^7 < 7!$.
$\vdots$

La base de inducción consiste en demostrar la $1^a$ afirmación. La demostración aquí es sencilla puesto que $2^4 = 16$, $4! = 24$ y $16 < 24$, así $2^4 < 4!$.

La hipótesis de inducción puede ser, en este caso, la siguiente: Para cierta $k \geq 4$ se tiene $2^k < k!$. (Notemos que la primera afirmación que se toma como cierta en esta hipótesis es para $k = 4$ y que ésta quedó demostrada en la base de inducción.) Ahora usaremos la hipótesis de inducción para hacer ver que $2^{k+1} < (k+1)!$. En efecto, esto se deduce de la siguiente cadena de igualdades y desigualdades en la que en la primera desigualdad se usó la hipótesis de inducción y en la segunda desigualdad se utilizó que $k + 1 > 2$ (esto último es porque $k \geq 4$):

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k < 2 \times k! < (k+1) \times k! = (k+1)!.$$

(Notemos aquí que las dos igualdades en la cadena fueron de tipo com-

parativo: sirvieron para establecer la liga entre la afirmación que estaba por probarse y la anterior, que se suponía cierta según la hipótesis de inducción.) Hemos completado satisfactoriamente los tres pasos en el método de inducción, así que el resultado queda probado. ■

**[4.3] Ejemplo.** Probar por inducción la fórmula de Gauss

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

para n natural. (Ver ejemplo [3.1].)

**Solución.** Nótese que el miembro izquierdo de la fórmula indica que dado el número natural $n$ hay que sumar todos los naturales más chicos que $n$, incluyendo el mismo $n$. Así, la sucesión de proposiciones es:

$1^{a}$ proposición: $1=\frac{1\times 2}{2}$.

$2^{a}$ proposición: $1+2=\frac{2\times 3}{2}$.

$3^{a}$ proposición: $1+2+3=\frac{3\times 4}{2}$.

$4^{a}$ proposición: $1+2+3+4=\frac{4\times 5}{2}$.

$\vdots$

En este caso la base de la inducción consiste en demostrar la $1^{a}$ proposición, la cual es obvia.

Tomaremos como hipótesis de inducción la siguiente: Para cierta $k\geq 1$ (abarcando la BI) se tiene que $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Queremos usar esto para probar que $1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$. Para ello tomamos el lado izquierdo de la igualdad que queremos probar y buscamos la forma de acomodar los términos para usar la hipótesis de inducción y después obtener el lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(k+1)&=1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\end{aligned}$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Notamos que la primera igualdad es el paso comparativo y en la segunda igualdad se usó la HI. Esto termina la demostración. ■

*Nota.* La fórmula del ejemplo anterior puede probarse también sin usar el método de inducción (ni combinatoria). En efecto, llamemos $S_n$ a la suma de los primeros $n$ naturales, escribamos $S_n$ de dos maneras diferentes y sumemos miembro a miembro:

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1). \end{array}$$

De la última ecuación tenemos la fórmula buscada.

Con inducción podemos también probar fórmulas en que hay más de una variable. El siguiente es un ejemplo típico. El contenido de la fórmula es muy útil en diversos problemas.

**[4.4] Ejemplo.** Si $r$ es cualquier número distinto de 1 (no necesariamente natural), entonces

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

para cualquier natural $n$.

**Demostración.** La sucesión de proposiciones está indicada por $n$:

$1^a$ proposición: $1 + r = \frac{r^{1+1}-1}{r-1}$.
$2^a$ proposición: $1 + r + r^2 = \frac{r^{2+1}-1}{r-1}$.
$3^a$ proposición: $1 + r + r^2 + r^3 = \frac{r^{3+1}-1}{r-1}$.
$4^a$ proposición: $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 = \frac{r^{4+1}-1}{r-1}$.
$\vdots$

Para probar la primera afirmación (base de la inducción) recordemos que $(r+1)(r-1) = r^2 - 1$. Ahora basta dividir esta ecuación por $r-1$.

La *HI* en este caso es: "Para cierta $k \geq 1$ se cumple $1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$." A partir de esta suposición probemos la fórmula correspondiente para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 1 + r + \cdots + r^{k+1} &= 1 + r + \cdots + r^k + r^{k+1} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1}{r-1} + r^{k+1} \qquad \text{(por } HI\text{)} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1 + (r-1)r^{k+1}}{r-1} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r-1} \\ &= \frac{r^{k+2} - 1}{r-1} \\ &= \frac{r^{(k+1)+1} - 1}{r-1}. \end{aligned}$$

De esta serie de igualdades concluimos que, si la fórmula se supone válida para $n = k$, entonces también lo será para $n = k+1$, y con esto completamos satisfactoriamente todos los pasos en el método de inducción. Por lo anterior podemos afirmar que la fórmula es cierta para cualquier natural $n$. ■

**[4.5] Ejercicio.** Probar la afirmación del ejemplo anterior en forma no inductiva. *Sugerencia:* Utilizar la misma idea con la que probamos la base de inducción.

Probaremos otra vez (ver [2.1]) la Fórmula del Binomio utilizando, en esta ocasión, la inducción.

**[4.6] Teorema del Binomio de Newton.** Sean $a$ y $b$ números arbitrarios y sea $n$ un número natural. Entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

**Demostración.** La sucesión de proposiciones es:

1ª proposición: $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b.$

2ª proposición: $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2.$

3ª proposición: $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.$

$\vdots$

La prueba de la base de inducción (es decir de la validez de la fórmula para $n = 1$) es inmediata. Hagamos la hipótesis de inducción: "Para cierta $k \geq 1$ se tiene

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k."$$

Utilizando esta hipótesis probemos que la fórmula también vale para $n = k+1$. Utilizaremos la Fórmula de Pascal

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1},$$

para $r$ y $n$ números enteros con $0 \leq r < n$ (ver ejercicio [1.34]). Por definición y por $HI$ tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b)\\ &= \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}a^k\right)(a+b).\end{aligned}$$

Ahora, desarrollando la multiplicación indicada (primero multiplicando por $a$ y después por $b$) obtenemos

$$\begin{aligned}&\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r+1}b^r + \cdots + \binom{k}{k}ab^{k+1}\\ &+ \binom{k}{0}a^kb + \cdots + \binom{k}{r-1}a^{k-r+1}b^r + \cdots + \binom{k}{k-1}b^{k+1} + \binom{k}{k}b^{k+1}.\end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes en toda esta suma, observemos que el primero y el último términos aparecen sólo una vez y sus respectivos coeficientes son $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ y $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$; cada uno de los otros términos $a^{k+1-r}b^r$ para $0 \geq r \geq k$, aparece dos veces, una al multiplicar $\binom{k}{r}a^{k-r}b^r$ por $a$ y otra al multiplicar $\binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)}b^{r-1}$ por $b$; entonces, por la Fórmula de Pascal quedará con coeficiente $\binom{k+1}{r}$. Obtendremos entonces

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \cdots + \binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r + \cdots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1},$$

como queríamos. La inducción nos dice entonces que la fórmula vale para todo número natural $n$. ■

Recordemos que dado un número natural $n$ hemos definido $n!$ como el producto de todos los naturales menores o iguales que $n$ y que hemos convenido que $0! = 1$. La definición de $n!$ también se puede dar en *forma inductiva* o *recursiva* (es decir, se tiene una base y la definición de los términos después de esa base se da en relación con los términos anteriores que ya se suponen conocidos). Dicha definición recursiva es como sigue: Se define $0! = 1$ y, para $n \geq 1$ se define $n! = n \times (n-1)!$.

En los siguientes ejemplos compararemos algunas definiciones no recursivas con otras recursivas.

**[4.7] Ejemplo.** Definamos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ recursivamente por $a_1 = 1$ y, para $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + 2$, decir cuál es el valor de los primeros 6 términos de la sucesión y dar una definición no recursiva de la misma sucesión.

**Solución.** Para obtener los primeros 6 términos de la sucesión partimos de la base $a_1 = 1$ y vamos construyendo los siguientes términos sumando 2 al término recién construido: 1, 3, 5, 7, 9, 11. Una definición no recursiva de la misma sucesión es $a_n = 2n - 1$.

El ejemplo anterior es un caso particular de las llamadas *sucesiones o progresiones aritméticas*; en general una sucesión aritmética

es una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es un número constante $d$, es decir $a_{n+1} = a_n + d$, para toda $n$.

Otros ejemplos de sucesiones aritméticas son:

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (aquí $d = 1$ y $a_1 = 1$),
$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ (aquí $d = 2$ y $a_1 = 2$),
$10, 17, 24, 31, 38, \ldots$ (aquí $d = 7$ y $a_1 = 10$).
$0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$ (aquí $d = \frac{-1}{2}$ y $a_1 = 0$).

Hemos visto que podemos determinar cualquier sucesión aritmética por recursión, es decir, en forma inductiva; es de esperar entonces que las demostraciones de afirmaciones sobre sucesiones aritméticas utilicen de alguna manera la inducción. Damos a continuación un ejemplo sencillo de esto que nos permitirá trabajar en forma no recursiva con sucesiones aritméticas.

**[4.8] Ejemplo.** Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión aritmética con diferencia $d$ (es decir, para toda $n$, $a_{n+1} = a_n + d$. Probar que para $n \geq 2$ se tiene $a_n = a_1 + (n-1)d$.

**Demostración.** La sucesión de afirmaciones es:
$1^a$ afirmación: $a_2 = a_1 + (2-1)d$.
$2^a$ afirmación: $a_3 = a_1 + (3-1)d$.
$3^a$ afirmación: $a_4 = a_1 + (4-1)d$.
$4^a$ afirmación: $a_5 = a_1 + (5-1)d$.
$\vdots$

La base de inducción es, en este caso, la primera afirmación (es decir, la afirmación para $n = 2$). Es fácil darse cuenta de la validez de esta proposición pues, por definición, $a_2 = a_1 + d$. Hagamos ahora la hipótesis de inducción: "Para cierta $k \geq 2$ es verdad que $a_k = a_1 + (k-1)d$". Utilizando esta $HI$ probemos que también es cierto el resultado para $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = a_k + d \qquad \text{(por definición)}$$

$$= a_1 + (k-1)d + d \qquad \text{(por } HI\text{)}$$
$$= a_1 + kd.$$

Esto termina la demostración. ■

Como mencinamos arriba, el ejemplo anterior nos permite usar una nueva definición no recursiva de sucesiones aritméticas; utilizando esta nueva definición podríamos probar afirmaciones sobre sucesiones aritméticas sin utilizar la inducción, en particular, podríamos conocer cualquier término de la sucesión sin necesidad de conocer el anterior.

**[4.9] Ejercicio.** Dada la sucesión aritmética con primer término $a_1 = 2$ y $d = \frac{1}{3}$ encontrar $a_{100}$.

**[4.10] Ejemplo.** Probar que si $a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia $d$, entonces para toda $n \geq 2$, la suma $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de los primeros $n$ términos de la sucesión se puede calcular según la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

**Solución.** No utilizaremos inducción sino el resultado obtenido en el ejemplo [4.8] y la Fórmula de Gauss (ver [4.3]):

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots (a_1 + (n-1)d) && \text{(por [4.8])} \\ &= na_1 + (d + 2d + \cdots + (n-1)d) \\ &= na_1 + (1 + 2 + \cdots + (n-1))d \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d && \text{(por Gauss)} \\ &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) && \text{(por [4.8])} \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. ■

En todas las pruebas por inducción que hemos hecho hasta el momento, al demostrar que la $(k+1)$-ésima afirmación es verdadera sólo hemos utilizado la validez de la $k$-ésima afirmación; inclusive, en cada caso simplificamos la hipótesis de inducción de tal manera que abarcara sólo la afirmación anterior a la que queríamos probar y no todas las anteriores. En los ejemplos que trataremos a continuación sí necesitaremos hacer la hipótesis de inducción como la anunciamos al principio de esta sección. La diferencia entre los casos que siguen y los anteriores es que cada afirmación está ligada no sólo a la que la precede sino a una o más de las anteriores. La práctica nos dirá cómo reconocer en qué caso nos encontramos; mientras tanto, podemos siempre hacer la hipótesis de inducción en su forma más general y, una vez que estemos en el tercer paso de la demostración inductiva, utilizar sólo lo que necesitemos de la hipótesis.

Considerando que llegado este punto ya debe ser obvio para el lector el primer paso de la inducción (es decir, identificar la sucesión de afirmaciones que abarca la afirmación general que se quiere probar), de aquí en adelante ya no incluiremos éste en nuestras demostraciones.

**[4.11] Ejemplo.** La *sucesión de Fibonacci* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se define como sigue: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y, para $n \geq 3$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Construir los primeros 10 términos de la sucesión de Fibonacci y probar la siguiente fórmula que nos proporciona una definición no recursiva de la sucesión:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

**Solución.** Construyamos los primeros 10 términos de la sucesión siguiendo la definición: Los primeros dos términos son ambos 1 y, para construir cada uno de los términos siguientes, sumemos cada vez los últimos dos que ya tengamos: 1,1,2,3,5,8,13,21,34, 55. Como pudimos observar en la misma definición, para conocer un término es necesario conocer no sólo el inmediato anterior sino los dos que le preceden. Es natural entonces pensar que una demostración por inducción de una

afirmación sobre todos los términos de la sucesión de Fibonacci deba tener una hipótesis de inducción que abarque las afirmaciones correspondientes a los dos términos que preceden al que se considera en ese momento. Por otro lado, los primeros dos términos están dados de manera independiente y los demás se basan en ellos; por esta razón, la base de inducción debe constar de la prueba de las dos afirmaciones correspondientes a éstos términos. Tomemos el lado derecho de la fórmula que queremos probar para $n = 1$:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Hagamos ahora lo mismo para $n = 2$:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{(1+2\sqrt{5}+5) - (1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1,$$

que es igual a $f_2$. Con esto concluimos la base de inducción. Ahora tomemos $k \geq 3$ y hagamos la hipótesis de inducción: "La fórmula es verdadera para todos los naturales menores que $k$". Tenemos entonces

$$\begin{aligned} f_k &= f_{k-1} + f_{k-2} && \text{(por definición)} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}}{\sqrt{5}} && \text{(por } HI\text{)} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos el miembro derecho de la fórmula para

$n = k$:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}.$$

Hemos obtenido lo mismo que teníamos arriba, así que la fórmula también es verdadera para $n = k$, y esto concluye la demostración. ■

**[4.12] Ejemplo.** Definamos una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ como sigue: $a_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$a_n = \binom{n}{0}a_0 + \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}a_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a_{n-1}.$$

Probar que todos los términos de la sucesión son impares.

**Solución.** Antes de empezar la demostración de que todos los términos son impares notemos primero que en la misma definición de la sucesión se hizo una recursión que utiliza no sólo el término anterior al que se está definiendo sino todos los anteriores. Es natural entonces pensar que para probar que un término $a_n$ $(n \geq 1)$ es impar, debemos utilizar el que todos los anteriores $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ lo son; así que en este caso, la hipótesis de inducción deberá abarcar todos éstos. Conviene también escribir los primeros términos de la sucesión, pues el análisis cuidadoso de varios términos en particular muchas veces da una idea de cómo hacer la demostración general. (Nota: Esto no sería necesario si utilizáramos congruencias (módulo 2), que es una técnica para estudiar la divisibilidad entre enteros; lo que sigue se simplificaría

considerablemente utilizando, entonces, la fórmula de [2.6].) Tenemos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= \binom{1}{0} \times 1\\
&= 1 \times 1 = 1,\\
a_2 &= \binom{2}{0} \times 1 + \binom{2}{1} \times 1\\
&= 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3,\\
a_3 &= \binom{3}{0} \times 1 + \binom{3}{1} \times 1 + \binom{3}{2} \times 3\\
&= 1 \times 1 + 3 \times 1 + 3 \times 3 = 13,\\
a_4 &= \binom{4}{0} \times 1 + \binom{4}{1} \times 1 + \binom{4}{2} \times 3 + \binom{4}{3} \times 13\\
&= 1 \times 1 + 4 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 13 = 75,\\
a_5 &= \binom{5}{0} \times 1 + \binom{5}{1} \times 1 + \binom{5}{2} \times 3 + \binom{5}{3} \times 13 + \binom{5}{4} \times 75\\
&= 1 \times 1 + 5 \times 1 + 10 \times 3 + 10 \times 13 + 5 \times 75 = 541.
\end{aligned}$$

Observamos aquí que los coeficientes que van apareciendo son los del triángulo de Pascal, el cual sabemos que es simétrico respecto a la vertical central (esto es, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$). También sabemos que los términos centrales en los renglones pares (es decir, los de la forma $\binom{n}{\frac{n}{2}}$) son todos números pares (pues son la suma de los dos números iguales arriba de él). Hechas estas observaciones procedamos con la demostración.

La base de inducción es la prueba de que el primer término de la sucesión (es decir, $a_0$) es impar, lo cual es cierto por definición. Tomemos $k \geq 1$ y supongamos que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ son impares (ésta es nuestra hipótesis de inducción). Probaremos que $a_k$ es impar. Dividimos la prueba en dos casos: cuando $k$ es impar y cuando $k$ es par. En el primer caso, factorizando los coeficientes binomiales con sus simétricos, tenemos

$$a_k = 1 + \binom{k}{1}(a_1 + a_{k-1}) + \binom{k}{2}(a_2 + a_{k-2}) + \cdots + \binom{k}{\frac{k-1}{2}}\left(a_{\frac{k-1}{2}} + a_{\frac{k+1}{2}}\right).$$

Ahora utilizamos la hipótesis de inducción: como cada $a_i$ (con $1 \leq i \leq k-1$) es impar, cada una de las sumas $a_1 + a_{k-1}$, $a_2 + a_{k-2}$, $\ldots$, $a_{\frac{k-1}{2}} + a_{\frac{k+1}{2}}$ es un número par; con esto ya es claro que $a_k$ es impar, y aquí termina la prueba para el caso en que $k$ sea impar. En el caso en que $k$ sea par, agrupamos de la misma manera pero nos sobrará un término sin agrupar:

$$a_k = 1 + \binom{k}{1}(a_1 + a_{k-1}) + \binom{k}{2}(a_2 + a_{k-2}) + \cdots + \binom{k}{\frac{k}{2}} a_{\frac{k}{2}}.$$

Sin embargo, el término no agrupado también será par pues el coeficiente binomial en él lo es. Esto concluye la prueba en el caso en que $k$ sea par. Hemos completado satisfactoriamente los pasos de la inducción en todos los casos así que todos los términos de la sucesión son impares. ■

El resultado que sigue ya lo habíamos probado en la sección 3 con las técnicas de esa sección. Lo probaremos ahora usando el método de inducción matemática.

[**4.13**] **Proposición.** Todo conjunto con $n$ elementos tiene $2^n$ subconjuntos (ver ejemplo [3.2]).

**Demostración.** El resultado es obvio para cuando $n = 0$ pues el conjunto con 0 elementos sólo tiene un subconjunto que es él mismo. Sea $n \geq 1$; *HI:* "Todo conjunto con $n-1$ elementos tiene $2^{n-1}$ subconjuntos." Consideremos el conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con $n$ elementos. Queremos utilizar la *HI* para probar que $X$ tiene $2^n$ subconjuntos. Consideremos el conjunto $Y$ obtenido al quitarle a $X$ el elemento $x_n$. Por *HI*, $Y$ tiene $2^{n-1}$ subconjuntos. Ahora bien, los subconjuntos de $X$ podemos dividirlos en dos clases: los que no tienen al elemento $x_n$ (es decir, los que están contenidos en $Y$) y los que sí lo tienen. El número de conjuntos de las dos clases es el mismo pues cada conjunto de la segunda clase se obtiene adjuntando el elemento $x_n$ a uno de los conjuntos de la primera. Entonces, por *HI*, cada una de estas clases tiene $2^{n-1}$ conjuntos; en total $X$ tendrá $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ subconjuntos, como queríamos probar. Esto termina la demostración. ■

## Ejercicios

**[4.14]** Hacer una prueba inductiva y otra no inductiva de que el producto de tres enteros consecutivos es múltiplo de 6.

**[4.15]** Hacer una prueba inductiva y otra no inductiva de la siguiente fórmula para $n$ natural:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

*Sugerencia*: Para la prueba no inductiva, observar que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

**[4.16]** Sea $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Encontrar las dos clases de subconjuntos de $X$ de que se habla en la demostración de [4.13] y aparear los conjuntos de una clase con los de la otra como indica esa prueba.

**[4.17]** Demostrar por inducción que todo conjunto tiene la misma cantidad de subconjuntos con un número par de elementos que con un número impar. (Comparar con [2.7].)

**[4.18]** Probar por inducción que para $n$ natural se tiene la fórmula:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**[4.19]** Probar la fórmula del ejercicio anterior en forma no inductiva como sigue: Para $k=1,2,\ldots$ sea $a_k=(k+1)^3-k^3$. Calcular la suma $a_1+a_2+\cdots+a_n$ de dos maneras distintas e igualar. Despejar $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

**[4.20]** Calcular directamente la suma $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ para $n=1,2,3$ y 4. Basándose en estos ejemplos proponer una fórmula para calcular la suma para cualquier natural $n$ y probar la fórmula por inducción.

**[4.21]** Calcular la suma $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ utilizando un ra-

zonamiento parecido al del ejercicio [4.19]. *Sugerencia:* En este caso deberá considerarse $a_k = (k+1)^4 - k^4$ para $k = 1, 2, \ldots$.

**[4.22]** Calcular la suma

$$1 \times 1000 + 2 \times 999 + 3 \times 998 + \cdots + 999 \times 2 + 1000 \times 1.$$

**[4.23]** Calcular la suma

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{999 \times 1001}.$$

**[4.24]** Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ la sucesión de números definida recursivamente como sigue: $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ y, para $n \geq 2$, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$. Probar por inducción que para $n \geq 1$, $a_n \geq 0$.

**[4.25]** Una *sucesión o progresión geométrica con razón* $r$ es una sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$ en que cada uno se obtiene del anterior multiplicando por el número $r$ (es decir, para $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} r$). Dar una definición no recursiva para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$. Calcular la suma de los primeros 100 términos de esta sucesión.

**[4.26]** Probar por inducción la fórmula siguiente para $n$ natural:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(Comparar con [2.6] y [3.2].) *Sugerencia:* Utilizar la Fórmula de Pascal.

**[4.27]** Probar por inducción la fórmula siguiente para $n$ y $k$ enteros con $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

*Sugerencia:* Usar la Fórmula de Pascal. (Ver [3.4].)

**[4.28]** La siguiente afirmación es obviamente falsa: "En cualquier

lista de $n$ números enteros, todos son iguales entre sí." Determinar cuál es el error en la "demostración" por inducción que presentamos a continuación (es decir, encontrar en qué momento el procedimiento que se sigue en la supuesta demostración es incompleto o incorrecto): "$BI$: Para $n = 1$ la afirmación es verdadera pues sólo hay un número en la lista. $HI$: Supongamos que el resultado es cierto para cualquier lista de $n$ números y tomemos una lista de $n+1$ números: $a_1, a_2 \ldots, a_n, a_{n+1}$. Entonces, por $HI$, los primeros $n$ números $a_1, a_2 \ldots, a_n$ son iguales entre sí; aplicando también la hipótesis de inducción a los últimos $n$ números: $a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, éstos son también iguales entre sí. Pero entonces todos son iguales a $a_2$, así que todos son iguales entre sí."

**[4.29]** La siguiente afirmación es obviamente falsa: "El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es finito." Determinar cuál es el error en la "demostración" por inducción que presentamos a continuación (es decir, encontrar en qué momento el procedimiento que se sigue en la supuesta demostración es incompleto o incorrecto): "Para cada natural $n$ sea $A_n = \{n\}$. Sabemos que la unión de todos los conjuntos $A_n$ nos da el conjunto $\mathbb{N}$, y que la unión de dos conjuntos finitos es finito. Entonces $BI$: $A_1 \cup A_2$ es finito. $HI$: Supongamos que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ es finito para cierta $n \geq 3$. Entonces, como $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$, que es la unión de dos conjuntos finitos (usando la $HI$), también es finito. Queda entonces probado que $\mathbb{N}$ es finito."

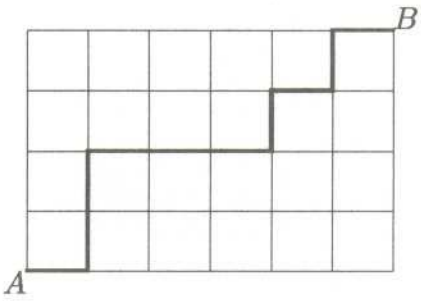
*Sección 5*

# Caminos

Analizaremos en esta sección un ejemplo básico de cuenta de *caminos* siguiendo líneas en figuras. En este ejemplo aprenderemos dos técnicas para la resolución de problemas de este estilo y tendremos oportunidad de practicar algunas técnicas de combinatoria aprendidas antes.

**[5.1] Ejemplo.** En una cuadrícula de $m$ por $n$, sea $A$ el vértice inferior izquierdo y sea $B$ el vértice superior derecho. ¿Cuántos caminos hay de $A$ a $B$ siguiendo las líneas de la figura, si sólo se puede avanzar hacia la derecha y hacia arriba?

**Solución.** Ilustremos un camino con $m = 4$ y $n = 6$.




*Primera forma.* Notemos que cada camino debe recorrer una distancia total de $m + n = 10$ segmentos, de los cuales 6 segmentos se recorren horizontalmente y 4 verticalmente. Entonces cada camino se puede identificar con una "palabra" de 10 letras que usa 6 letras $H$ (horizontal) y 4 letras $V$ (vertical). (Por ejemplo, el camino de la figura está representado por la palabra $HVVHHHVHVH$.) Como sabemos (ver ejemplo [1.23]), el número de estas palabras es $\binom{10}{4}$.

*Segunda forma.* Observemos que hay dos maneras para llegar a cada vértice que no forme parte del lado izquierdo o del lado de abajo de la cuadrícula (a los cuales sólo hay una forma de llegar): verticalmente (desde el vértice inmediatamente abajo de él) y horizontalmente (desde el vértice inmediatamente a la izquierda de él). Entonces, el número de caminos que llegan a uno de esos vértices es la suma de los caminos que llegan a los vértices adyacentes a la izquierda y abajo de él. Así podemos poner en la figura, junto a cada vértice, el número de caminos que llegan a él:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 B |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

A

## Ejercicios

**[5.2]** Dentro de un cubo de alambre $C$ de dimensiones $5 \times 5 \times 5$ se colocan alambres dividiendo $C$ en cubos de dimensiones $1 \times 1 \times 1$. Llámese $A$ al vértice inferior izquierdo de la cara anterior de $C$ y sea $B$ el vértice opuesto a $A$ en $C$ (es decir, $B$ es el vértice superior derecho de la cara posterior de $C$). ¿Cuántos "caminos" diferentes llegan del punto $A$ al punto $B$ siguiendo los alambres del cubo, si las únicas direcciones permitidas son: hacia atrás, hacia la derecha y hacia arriba?

**[5.3]** Usar caminos para probar la fórmula de naturales $n$:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

*Sugerencia:* Contar caminos en una cuadrícula de $n \times n$ como en la primera forma en el ejemplo [5.1], fijándose en los puntos donde el camino atraviesa la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha. (Comparar con ejercicio [2.8].)

**[5.4]** Usar caminos para probar la fórmula de Pascal

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1},$$

para $r$ y $n$ números enteros con $0 \leq r < n$. *Sugerencia*: Comparar las dos formas de resolver el ejemplo [5.1]. (Ver [1.34].)

*Sección 6*

# Inclusión y Exclusión

Empecemos esta sección analizando un ejemplo que nos dará la clave del llamado *Principio de Inclusión y Exclusión.*

**[6.1] Ejemplo.** ¿Cuántos números menores que 10 000 no son divisibles ni por 2, ni por 3, ni por 5?

**Solución.** A 10 000 habrá que restarle la cantidad de números divisibles por alguno de 2, 3 o 5. Sin embargo esto hay que hacerlo con cuidado para evitar repeticiones; por ejemplo, los números que son divisibles tanto por 2 como por 3 se consideran dos veces: al contar los divisibles por 2 y al contar los divisibles por 3. Vamos a determinar primero, por separado, cuántos múltiplos hay de cada una de las distintas combinaciones entre 2, 3 y 5.

Hay 5 000 números divisibles por 2,
3 333 divisibles por 3,
2 000 divisibles por 5,
1 666 divisibles por 6,

1 000 divisibles por 10,
666 divisibles por 15 y
333 divisibles por 30.

Al restarle a 10 000 la cantidad de números divisibles por 2 y luego los divisibles por 3 y a continuación los divisibles por 5:

$$10\,000 - (5\,000 + 3\,333 + 2\,000),$$

los que son divisibles por 6, por 10 o por 15 pero no por 30 se habrán quitado dos veces cada uno, y los que son múltiplos de 30 se habrán quitado tres veces. Entonces al agregar a la cuenta los que son múltiplos de 6, de 10 o de 15, los que son divisibles por 30 se habrán quitado primero tres veces al restar los múltiplos de 2, de 3, y de 5, y después se habrán vuelto a sumar tres veces al sumar los múltiplos de 6 y los de 10 y los de 15, así que tendremos que restarlos. La respuesta al ejemplo es pues:

$$10\,000 - (5\,000 + 3\,333 + 2\,000) + (1\,666 + 1\,000 + 666) - 333 = 2\,666. \quad \blacksquare$$

**[6.2] Ejercicio.** En cierta escuela hay 100 alumnos. De ellos 50 saben inglés, 30 saben alemán y 30 saben francés. Además 10 saben inglés y francés, 14 saben francés y alemán, 11 saben inglés y alemán, y 6 saben los tres idiomas. Determinar cuántos alumnos no saben ninguno de los tres idiomas.

El procedimiento que utilizamos en el ejemplo anterior puede generalizarse, según veremos en el siguiente principio.

**[6.3] Principio de Inclusión y Exclusión.** Supongamos que tenemos $n$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (posiblemente con elementos en común). Entonces el número total $k$ de elementos que tienen entre todos es igual a $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + - \cdots k_n$, donde $k_1$ es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) uno de los conjuntos, $k_2$ es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) dos de los conjuntos, y así sucesivamente hasta $k_n$, que es el número de elementos en común a todos los conjuntos. (Utilizando el lenguaje usual

de teoría de conjuntos donde $|X|$ denota el número de elementos de un conjunto $X$, $\cup$ es el símbolo usual de unión y $\cap$ es el símbolo usual de intersección, tenemos: $k = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$, $k_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$, $k_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$, y así sucesivamente hasta $k_n = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$.)

**Demostración.** Tomemos un elemento cualquiera y supongamos, por ejemplo, que el elemento pertenece a los conjuntos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ para cierta $r$, y sólo a éstos. Entonces el número de veces que dicho elemento se considera en la suma $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + - \cdots k_n$ es

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \binom{r}{4} + - \cdots \binom{r}{r},$$

que, por el ejercicio [2.7], es igual a $\binom{r}{0}$, que es 1. Entonces la suma $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + - \cdots k_n$ cuenta cada elemento exactamente una vez, que es lo que queríamos demostrar. ■

Para el siguiente ejemplo recordemos que todo número natural $N$ se puede escribir en forma única como producto de potencias de primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$: $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_r$ son naturales) y que a ésta se le llama la *descomposición canónica* del número $N$. Recordemos también que se dice que dos números son *primos relativos* cuando su máximo común divisor es 1 (en otras palabras, cuando los primos que aparecen en sus descomposiciones canónicas, son distintos).

**[6.4] Ejemplo.** Sea $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ la descomposición canónica del número natural $N$. Se llama $\Phi(N)$, o *función $\Phi$ de Euler* al número de enteros menores que $N$ y primos relativos con $N$. (Por ejemplo $\Phi(12) = 4$ pues los enteros menores que 12 y primos relativos con 12 son 4, a saber, 1, 5, 7 y 11.) Probar que

$$\Phi(N) = p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2 - 1} \cdots p_r^{a_r - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1).$$

**Solución.** Aplicamos el Principio de Inclusión y Exclusión. Los múltiplos de cada $p_i$ son $\frac{N}{p_i}$; los múltiplos de cada $p_i p_j$ (para $i \neq j$)

son $\frac{N}{p_i p_j}$; los múltiplos de los productos $p_i p_j p_k$ (para $i$, $j$ y $k$ índices distintos) son $\frac{N}{p_i p_j p_k}$, y así sucesivamente. Entonces $\Phi(N)$ es igual a:

$$N - (\frac{N}{p_1} + \cdots + \frac{N}{p_r}) + (\frac{N}{p_1 p_2} + \cdots + \frac{N}{p_{r-1} p_r}) - \cdots + (-1)^r \frac{N}{p_1 p_2 \cdots p_r} =$$
$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} - (p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} + p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} \cdots p_r^{a_r} + \cdots + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r - 1}) +$$
$$(p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2 - 1} \cdots p_r^{a_r} + \cdots + p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1} - 1} p_r^{a_r - 1}) + \cdots +$$
$$(-1)^r p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2 - 1} \cdots p_r^{a_r - 1}.$$

Podemos observar que los sumandos en la expresión anterior son todas las expresiones de la forma $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r}$, donde cada $b_i$ es igual a $a_i$ o a $a_i - 1$; además la paridad del número de sumandos que son $a_i - 1$ determina el que se sume o se reste el término correspondiente en la expresión. Entonces la expresión se puede simplificar:

$$\begin{aligned} \Phi(N) &= (p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}) \cdots (p_r^{a_r} - p_r^{a_r - 1}) \\ &= p_1^{a_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{a_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_r^{a_r - 1}(p_r - 1), \end{aligned}$$

que es la fórmula que queríamos probar. ■

## Ejercicios

**[6.5]** Usar la fórmula probada en el ejemplo anterior para calcular $\Phi(600)$, $\Phi(1995)$, $\Phi(23)$ y $\Phi(128)$.

*El siguiente ejercicio está basado en el conjunto de fichas del dominó (antes del ejercicio [1.41] aparece la descripción de este conjunto).*

**[6.6]** Se dice que una mano de dominó tiene *falla* si alguno de los números entre el 0 y el 6 no aparece en la mano (cada número faltante es una falla); por ejemplo la mano $\boxed{2|1}$, $\boxed{5|5}$, $\boxed{3|1}$, $\boxed{0|0}$, $\boxed{1|0}$, $\boxed{5|6}$, $\boxed{0|2}$ tiene falla a 4's. Probar que el número de manos de dominó que no tienen falla es 501 015.

*Sección 7*

# Probabilidad

Como una aplicación de los métodos de conteo que hemos estudiado en la sección 1, daremos ahora una introducción muy breve al estudio de la *probabilidad*. No daremos aquí una definición formal del concepto matemático de probabilidad; en lugar de ello daremos un principio básico (válido sólo dentro de los conjuntos finitos) y trabajaremos varios ejemplos que nos aclararán la forma correcta en que dicho principio debe interpretarse.

*La probabilidad de que algo ocurra es el cociente del número de casos favorables entre el número total de casos posibles.*

Un ejemplo muy sencillo es el siguiente: La probabilidad que al lanzar una moneda al aire la cara que salga (es decir, la cara que se muestra hacia arriba cuando la moneda cae) sea águila es $\frac{1}{2}$, pues de 2 que es el número total de casos posibles (águila y sol), 1 es el favorable. Lo que esto quiere decir es que, suponiendo condiciones ideales (por ejemplo que la moneda esté bien nivelada en cuanto a peso y forma,

que se lance la moneda de tal manera que no sea posible controlar lo que va a salir, que la moneda no pueda caer de canto), si la moneda se lanza al aire muchas veces, se espera que alrededor de la mitad de ellas caiga águila. (Ver el comentario después del ejemplo [7.5], donde se explica cómo debe interpretarse esto.)

Otro ejemplo clásico es el del lanzamiento del dado. Aquí la probabilidad de que al lanzar un dado salga 3 es $\frac{1}{6}$ pues hay 1 caso favorable de los 6 posibles que son: que salga 1, que salga 2, etc. Desde luego, aquí también se supone que las condiciones del dado y del lanzamiento son ideales.

Cabe advertir que el aplicar nuestro principio descuidadamente nos puede llevar a razonamientos erróneos como el siguiente:

"La probabilidad de que el número que salga al lanzar un dado sea 3 es $\frac{1}{2}$ pues son 2 los casos posibles: que salga 3 o que no salga 3, y de éstos 1 es favorable."

El error aquí es que, aún cuando es cierto que éstos son los casos posibles, éstos no son comparables al mismo nivel de frecuencia (decimos que no son "igualmente probables"), la frecuencia con la que se espera que salga el 3 no es la mitad de las ocasiones, pues se espera que cada número salga con la misma frecuencia.

Mencionaremos a continuación algunas propiedades que satisface la probabilidad. No es difícil convencerse de su validez. Después de cada una haremos algún comentario al respecto.

### [7.1] Propiedades.

**(P1)** *La probabilidad de que algo ocurra es un número entre* 0 *y* 1. *Es* 0 *cuando es imposible que ocurra, y es* 1 *cuando es seguro que debe ocurrir.*

Esta propiedad es clara pues los casos favorables son una parte de los totales.

Los casos que nosotros tratamos aquí son todos números racionales, es decir, cocientes de enteros. Sin embargo al trabajar la probabilidad en un contexto más general (con conjuntos infinitos), dado cualquier

número entre 0 y 1 (racional o no) se pueden dar ejemplos cuya probabilidad sea el número dado.

**(P2)** *Si la probabilidad de que algo ocurra es $p$, entonces la probabilidad de que no ocurra es $1-p$.*

Esto también es claro pues los casos generales se componen de los favorables y los desfavorables. Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar un dado no salga el 3 es $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$.

**(P3)** *Si dos cosas no pueden ocurrir simultáneamente, la probabilidad de que ocurra una o la otra (es decir, cualquiera de las dos) es la suma de las probabilidades.*

Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar un dado salga 3 o un número par es $\frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$. Lo que dice la propiedad es que los casos favorables se pueden contar globalmente (en el ejemplo: 3, 2, 4 y 6 son los cuatro casos favorables de los 6 posibles), o parcialmente, y luego juntarlos (en el ejemplo, considerar por separado 3 y después los pares). Observemos que la propiedad no sería válida si no pidiéramos que los sucesos fueran mutuamente excluyentes, es decir, si hubiera la posibilidad de que ocurrieran simultáneamente; por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar un dado lo que salga sea un número mayor que 3 o que sea un número par es $\frac{4}{6}$ (los casos favorables son 2, 4, 5 y 6) y no $\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$, que sería la suma de las probabilidades (los casos 4 y 6 son comunes a los dos y se estarían contando dos veces al sumar las probabilidades).

**(P4)** *La probabilidad de que ocurran dos cosas en un orden determinado es el producto de las probabilidades.*

Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar dos veces una moneda primero salga águila y luego salga sol es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Esto es claro si recordamos que al contar los arreglos (tanto los favorables como los generales) también multiplicamos. En el ejemplo, el número total de posibilidades es $2 \times 2 = 4$: águila-águila, águila-sol, sol-águila y sol-sol; sólo hay uno favorable formado por las posibilidades favorables individuales: primero águila y después sol. ■

Como ya habíamos hecho notar, el principio que propusimos de

$$\frac{\#\text{de casos favorables}}{\#\text{total de casos}}$$

debe interpretarse con cuidado. El ejemplo siguiente nos ayudará a entender un poco más esto.

**[7.2] Ejemplo.** Dentro de cierto grupo de 4 caballos numerados del #1 al #4 se ha observado que la frecuencia con que el caballo #1 gana es el doble que con la que gana el #2; que éste a su vez gana el doble de veces que el #3, y que el #3 gana el doble de veces que el #4. Encontrar la probabilidad de que en la próxima carrera el caballo ganador sea el #1 o el #3.

**Solución.** Sería incorrecto decir que el número total de casos es 4 y que de éstos los favorables son 2, pues se nos ha advertido que las frecuencias con las que los caballos ganan no son las mismas. Tenemos que dar cierto "peso" a cada caballo de tal manera que la frecuencia con la que dicho caballo gana esté representada; esto lo hacemos como sigue: Representemos con fichas la proporción con que ganan los caballos; por ejemplo asignemos

1 ficha al caballo #4,
2 fichas al caballo #3,
4 fichas al caballo #2 y
8 fichas al caballo #1.

El número total de casos será entonces el número de fichas: $1+2+4+8=15$, y el número de casos favorables será $2+8=10$, que es el número de fichas correspondientes a los caballos #1 y #3. La probabilidad es $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$. ■

Para eliminar complicaciones técnicas, en los dos ejemplos siguientes consideraremos el año con 365 días (sin contar en ningún caso el 29 de febrero) y supondremos que la distribución de los cumpleaños es pareja a lo largo del año.

**[7.3] Ejemplo.** Encontrar la probabilidad de que una persona determinada haya nacido en noviembre o diciembre.

**Solución.** El número de días favorables es 61, así que la probabilidad es $\frac{61}{365}$, que es aproximadamente igual a $\frac{1}{6}$. ■

**[7.4] Ejemplo.** Encontrar la probabilidad de que en un grupo de 61 personas al menos 2 tengan el mismo cumpleaños.

**Solución.** Notemos que este ejemplo difiere del anterior en que las fechas de cumpleaños no se comparan con fechas fijas sino entre sí. Veremos que los resultados son muy distintos. Para resolver el ejemplo resulta más fácil contar la probabilidad opuesta: que no haya ningún cumpleaños repetido, y después usar la propiedad (P2). Utilizaremos repetidamente la propiedad (P4). Consideremos un orden fijo para las personas. La probabilidad de que el segundo cumpleaños sea distinto del primero es $\frac{364}{365}$. La probabilidad de que el tercero sea distinto de los dos anteriores es $\frac{363}{365}$, y así sucesivamente. El resultado es

$$1 - \frac{364 \times 363 \times \cdots \times 305}{365^{60}},$$

que es aproximadamente igual a 0.995. Esto quiere decir que de 1000 grupos de 61 personas cada uno, se espera que en sólo 5 de los grupos no haya cumpleaños comunes. (Compárese este resultado con el del ejemplo anterior. Resulta que basta con 23 personas para que la probabilidad de que haya cumpleaños repetidos entre ellas sea mayor que $\frac{1}{2}$.) ■

**[7.5] Ejemplo.** Encontrar la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 10 veces caigan exactamente 5 águilas.

**Solución.** Si escribimos $A$ por águila y $S$ por sol, el resultado de los diez lanzamientos puede representarse por una sucesión de longitud 10 formada por los símbolos $A$ y $S$, de manera que el número total de posibilidades es $2^{10} = 1024$. Los casos favorables están representados por las "palabras" que tienen exactamente 5 $A$'s y esto es el número de formas en que se pueden escoger 5 posiciones (donde aparezcan

las $A$'s) dentro de un total de 10, es decir, $\binom{10}{5} = 252$. Entonces la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 10 veces salgan exactamente 5 águilas es $\frac{252}{1024}$, que es aproximadamente igual a 0.25. ■

En forma análoga a la resolución del ejemplo anterior tenemos que la probabilidad de que de un total de 20 lanzamientos de la moneda 10 salgan águila es $\frac{1}{2^{20}}\binom{20}{10}$, que es aproximadamente igual a 0.176. Se puede demostrar que mientras más lanzamientos se hagan, la probabilidad de que la mitad de las veces salga águila es menor. Esto no contradice lo que se había dicho anteriormente sobre que si una moneda se lanzaba al aire un número grande de veces se esperaría que un número cercano a la mitad de las ocasiones cayera águila; la explicación para esto es que la idea de "cercanía" debe manejarse en forma relativa al tamaño del número; por ejemplo, en el caso de 10 lanzamientos podríamos decir que los casos en que salieran entre 3 y 7 águilas son todos "cercanos" a la mitad, y en el caso de 20 lanzamientos diríamos que los casos "cercanos" a la mitad son entre 5 y 15.

**[7.6] Ejercicio.** Encontrar la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 10 veces salga águila entre 3 y 7 veces.

**[7.7] Ejemplo.** Alejandra y Delia van a jugar un juego. Alejandra lanzará un dado y le dará una moneda a Delia cada vez que lo que salga en el dado no sea 2. Si se quiere que ninguna de las dos jugadoras tenga ventaja sobre la otra, ¿cuántas monedas deberá pagar Delia cada vez que salga el 2?

**Solución.** Como la probabilidad de que salga el 2 es $\frac{1}{6}$, se espera que de cada 6 veces una de ellas salga 2; entonces Delia deberá darle 5 monedas cuando esto ocurra. En 6 juegos se espera que Alejandra pierda 5 veces una moneda y gane una vez 5 monedas, por lo que su ganancia esperada es de 0. ■

Generalicemos el ejemplo que acabamos de estudiar. Si algo puede ocurrir de un total de $r$ formas (mutuamente excluyentes) con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (de manera que $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$) y

ganancias respectivas $g_1, g_2, \ldots, g_r$, entonces el *valor esperado* $E$ del suceso se define como

$$E = g_1p_1 + g_2p_2 + \cdots + g_rp_r.$$

Para entender mejor esta nueva definición analicemos en el ejemplo [7.7] cuál es la ganancia esperada de Alejandra si Delia le da 5 monedas cada vez que salga el 2. Llamemos $p_1$ a la probabilidad de que no salga el 2 y $p_2$ a la probabilidad de que sí salga; entonces $p_1 = \frac{5}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $g_1 = -1$ (pues Alejandra pierde una moneda cuando no sale el 2) y $g_2 = 5$. El valor esperado del suceso (ganancia esperada para Alejandra) es $E = (-1) \times \frac{5}{6} + 5 \times \frac{1}{6} = 0$.

**[7.8] Ejemplo.** En el juego de ruleta hay 36 números (del 1 al 36) y además los símbolos 0 y 00, con los que el dueño de la ruleta gana automáticamente. Se ofrece pagar 36 veces lo apostado cada vez que salga el número al que uno apostó (es decir, si uno indica uno de los 36 números y paga una ficha por jugar, en caso que al girar la ruleta la bolita se detenga en el número escogido, el dueño de la ruleta le devolverá su ficha al jugador y le dará otras 35 más). ¿Cuál es la ganancia esperada de un jugador?

**Solución.** Llamemos $p_1$ a la probabilidad de que el jugador gane, y $p_2$ a la probabilidad de que pierda. Entonces $p_1 = \frac{1}{38}$, $p_2 = \frac{37}{38}$, $g_1 = 35$ y $g_2 = -1$; así $E = 35 \times \frac{1}{38} + (-1) \times \frac{37}{38} = \frac{-2}{38}$, que es aproximadamente igual a $-0.05$. Esto quiere decir que el jugador espera perder alrededor de un 5% de lo apostado; en otras palabras, el dueño de la ruleta espera ganar el 5% de lo que se apueste. ■

## Ejercicios

*En algunos de los ejercicios que se presentan a continuación se hace referencia al juego de baraja o al de dominó. Las descripciones de éstos se pueden encontrar, respectivamente, en las explicaciones que aparecen antes de los ejercicios [1.28] y [1.41].*

**[7.9]** Una persona quiere apostar que la suma de lo que muestren dos dados es cierto número. ¿A qué número le conviene apostar? Calcular la probabilidad de que salga dicho número.

**[7.10]** Supongamos que se va a jugar un juego de pókar muy simple en el que se reparten 5 cartas y el "mejor juego" (es decir, el que tiene la menor probabilidad de ocurrir) gana. Según las probabilidades ¿cómo debe ser la jerarquía entre las manos que contengan exactamente cada uno de los siguientes: full, flor, corrida, un par, dos pares, pókar y tercia?

**[7.11]** Se eligen al azar $n$ cartas de la baraja. ¿Cómo debe ser $n$ para que la probabilidad de que entre las cartas elegidas haya (al menos) dos del mismo número sea mayor que $\frac{1}{2}$? ¿Cuál es la probabilidad si $n = 14$?

**[7.12]** En cierto examen de opción múltiple con 5 opciones en cada respuesta se califica como sigue: por cada respuesta correcta se otorga $+1$ punto, por cada respuesta incorrecta se otorga $-\frac{1}{4}$ de punto, y por cada pregunta sin contestar se otorgan 0 puntos. ¿Qué calificación esperaría obtener alguien que contestara todo el examen al azar?

**[7.13]** ¿Con qué frecuencia un jugador de dominó espera tener una mano con al menos dos fichas dobles?

**[7.14]** Calcular la probabilidad de que al lanzar tres veces dos dados, las tres veces los números que salgan sean iguales entre sí (por ejemplo, la primera vez (6,6), la segunda (1,1) y la tercera (6,6)).

**[7.15]** Se escogen al azar en sucesión tres números (posiblemente iguales) entre el 1 y el 100. ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan escogido en orden creciente estricto?

**[7.16]** Un grupo de 4 mujeres y 4 hombres se dividirá en dos equipos con 4 miembros cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que

en uno de los equipos queden todos los hombres y en el otro todas las mujeres?

**[7.17]** Un dado se lanza al aire 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca cada uno de los seis números una vez?

**[7.18]** Supongamos que de un grupo de 10 enfermedades cada una tiene probabilidad $\frac{1}{10}$ de atacar a un animal determinado a lo largo de su vida. ¿Qué probabilidad tiene ese animal de enfermarse de al menos una de esas enfermedades?

**[7.19]** Comparar las respuestas de las tres preguntas siguientes:

i) Lancé una moneda al aire dos veces y una de ellas salió águila. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también haya salido águila?

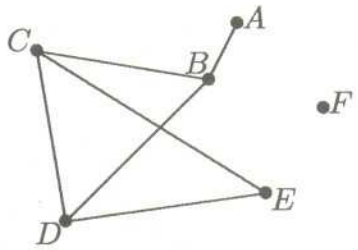
ii) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire dos veces las dos veces salga águila?

iii) Lancé una moneda al aire y salió águila. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la moneda otra vez vuelva a salir águila?

*Sección 8*

# Gráficas

En algunos problemas de combinatoria ciertos objetos tienen una relación determinada entre sí. Conviene en muchos de esos casos hacer una representación de los objetos mediante puntos en el plano (o en el espacio) y expresar la relación entre ellos mediante líneas que unan esos puntos. Esta representación es una *gráfica* (o *grafo*) para el problema (no debe confundirse este concepto con el de gráfica de una función, pues no tienen ninguna relación). Los objetos se llaman *vértices* de la gráfica, y las líneas entre los objetos se llaman *aristas*. Por ejemplo, la siguiente es una gráfica con vértices $A, B, C, D, E$ y $F$. Notemos que la intersección de las aristas $EC$ y $BD$ no es un vértice; podemos decir que es un "accidente" del dibujo. Notemos también que ninguna arista llega al vértice $F$.

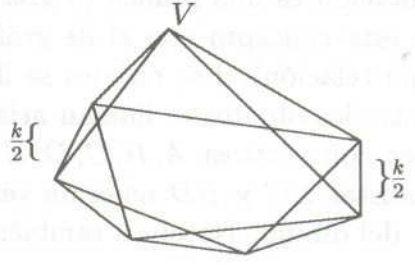



Desde luego, las gráficas pueden ser de naturaleza muy diversa, según el problema que representen. Resolveremos algunos ejemplos de aplicaciones. Se aprovecharán éstas para ir introduciendo la nomenclatura usual en gráficas.

**[8.1] Ejemplo.** Se quiere diseñar una competencia con $n$ participantes en la que cada uno compita exactamente con otros $k$. Probar que una competencia tal puede diseñarse si y sólo si $nk$ es par y $n \geq k+1$.

**Solución.** Supongamos primero que $nk$ es par y que $n \geq k+1$. Marquemos en una figura los participantes con un punto y pongamos una línea entre dos de esos puntos para indicar que los dos participantes compiten entre sí, obteniendo una gráfica.

*Primer caso:* $k$ par. Pensemos en los puntos como los vértices de un $n$-ágono y unamos cada vértice con los $\frac{k}{2}$ vértices de cada lado que estén más cerca (en la ilustración se tomó $k = 4$). Como $n \geq k+1$, entonces $k \leq n-1$, así que lo de arriba sí es posible.




*Segundo caso*: $k$ impar. Como $nk$ es par, entonces $n$ debe ser par. Como antes, consideremos los puntos como los vértices de un $n$-ágono. Tenemos que $k-1$ es par, así que $\frac{k-1}{2}$ es un entero. Unamos cada

vértice con los $\frac{k-1}{2}$ más cercanos de cada lado y también con el opuesto (observamos que sí hay un opuesto pues $n$ es par y que hay suficientes vértices para unir puesto que $k \leq n-1$).

Recíprocamente, ahora pensemos que la competencia ya está dada y probemos que $nk$ es par y que $n \geq k+1$. La segunda condición es clara pues cada uno de los $n$ participantes no puede competir con más de $n-1$ (los restantes). Para ver la otra condición contemos el número de aristas en la gráfica de competencias. Como hay $n$ participantes y cada uno compite contra otros $k$, entonces $nk$ es el doble del número de aristas (cada arista se cuenta dos veces, por cada uno de los participantes), de aquí que $nk$ es par. ■

Llamamos *orden* o *valencia* de un vértice $V$ al número de aristas que llegan a $V$; denotamos este número por $o(V)$ (por ejemplo, en la gráfica que aparece antes de [8.1], $o(A) = 1$, $o(B) = o(C) = o(D) = 3$, $o(E) = 2$ y $o(F) = 0$, y en [8.1] todos los vértices tienen valencia $k$). Con esta terminología, podemos abstraer de la solución del ejemplo anterior el siguiente resultado: *Si en una gráfica con $n$ vértices todos los vértices tienen la mismo valencia $k$, entonces el número total de aristas es igual a la mitad de $nk$.* Con esta misma idea podemos también determinar número de aristas o de vértices en poliedros regulares, como analizamos en el siguiente ejemplo.

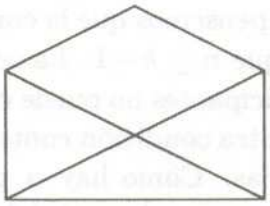
**[8.2] Ejemplo.** ¿Cuántos vértices hay en un icosaedro regular?

**Solución.** Recordemos primero que en el icosaedro las 20 caras son triángulos equiláteros y que a cada vértice llegan 5 caras (y 5 aristas). Entonces, como cada cara tiene tres vértices y cada vértice pertenece a 5 caras, el número de vértices es $\frac{20\times 3}{5} = 12$. ■

**[8.3] Ejercicio.** ¿Cuántas aristas hay en un icosaedro regular?

**[8.4] Ejemplo.** ¿Cuántos vértices y cuántas aristas hay en un dodecaedro regular? (*Nota:* Las 12 caras son pentágonos y a cada vértice llegan 3 caras).

Un reto común para niños pequeños es el siguiente problema. *¿Es posible dibujar el "sobre" que se indica en la figura sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces sobre la misma línea?*



La respuesta al problema es no, y la razón es muy simple: hay más de dos vértices de valencia impar. Para poner en forma más general y precisa este resultado, llamemos *recorrido* en una gráfica a una sucesión de aristas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que que para cada $i = 2, \ldots, n-1$, uno de los extremos de $a_i$ coincide con uno de $a_{i-1}$ (llamado *extremo inicial* de $a_i$ en el recorrido) y el otro con uno de $a_{i+1}$ (*extremo final* de $a_i$ en el recorrido). Tenemos que $a_1$ comparte un vértice con $a_2$; al otro vértice de $a_1$ se le llama *extremo inicial del recorrido*; de manera similar se define el *extremo final del recorrido*. Decimos que el recorrido es *completo en aristas* si cada arista de la gráfica aparece exactamente una vez en la sucesión. Entonces, nuestra afirmación es que no existe ningún recorrido completo en aristas en el sobre, lo cual quedará establecido en la siguiente proposición. Necesitamos antes una definición: Decimos que una gráfica es *conexa* si dados cualesquiera dos vértices en la gráfica existe un recorrido que tiene a uno como extremo inicial y al otro como extremo final; intuitivamente, la gráfica es conexa cuando es un solo "bloque" (por ejemplo, la gráfica que aparece al principio de esta sección no es conexa porque $F$ no está *conectado* con los demás vértices; sin embargo, si a esa gráfica se le quita $F$, entonces sí es conexa). En la siguiente proposición determinaremos exactamente cuáles son las gráficas que tienen recorrido completo en aristas; es claro que esas gráficas deben ser conexas, así que sólo para ellas se enunciará el resultado.

**[8.5] Proposición.** En una gráfica conexa hay un recorrido com-

pleto de aristas si, y sólo si, la gráfica tiene 0 o 2 vértices de valencia impar. Más aún, en el caso en que la gráfica no tenga vértices de valencia impar, el recorrido puede iniciar en cualquier vértice.

**Demostración.** Suponiendo que hay un recorrido completo de aristas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cada pareja de aristas sucesivas contribuye en 2 a la valencia del vértice compartido, así que todos los vértices "intermedios" del recorrido tienen valencia par (es decir, como al llegar a cada vértice, hay que volver a salir hasta haber utilizado todas las aristas, entonces todos los vértices, excepto tal vez el inicial y el final, tienen valencia par). De la misma manera, si el vértice inicial tiene valencia impar, entonces es claro que el recorrido termina en otro vértice de valencia impar.

Probemos el recíproco por inducción sobre el número de aristas. Consideremos primero el caso de gráficas sin vértices de valencia impar. La demostración de la base de inducción (0 aristas) es clara. Sea $G$ una gráfica con $a \geq 1$ aristas y 0 vértices de valencia impar. Tenemos la hipótesis de inducción siguiente: *En una gráfica conexa con 0 vértices de valencia impar y menos de $a$ aristas se puede construir un recorrido completo en aristas iniciando en cualquier vértice.* Utilizando esta hipótesis construyamos un recorrido en $G$ iniciando en cualquier vértice $v$. Para esto tomemos cualquier arista que tenga un extremo en $v$ y después una arista que inicie donde esa arista terminó; continuemos así sucesivamente mientras podamos ir escogiendo aristas sin repetir. En el momento en que nuestro recorrido no pueda continuar será porque llegamos a un vértice en el que todas las aristas ya se han usado; como todos los vértices tienen valencia par, eso querrá decir que el recorrido se cerró, es decir, que llegamos al vértice $v$ (donde habíamos empezado). En este momento es posible que todavía no se hayan usado todas las aristas; sin embargo, cada una de las partes conexas de la gráfica que no hayan sido recorridas es una gráfica en la que todos los vértices son de valencia par y que tiene menos aristas que nuestra gráfica. Entonces, consideremos un vértice $w$ del recorrido ya construido en el que haya alguna arista todavía no usada y sea $C$ la parte conexa de la gráfica que contiene a $w$ y que todavía no ha sido recorrida. Por la hipótesis

de inducción, en $C$ hay un recorrido completo en aristas que inicia en $w$. Entonces a nuestro recorrido le intercalamos esa parte (que obviamente debe terminar en el mismo $w$). Podemos hacer lo mismo en todos los vértices donde haya aristas no usadas todavía, obteniendo así el recorrido completo en aristas.

El caso de una gráfica con exactamente dos vértices de valencia impar se reduce al anterior: Construimos el recorrido iniciando en uno de los vértices de valencia impar. Con el mismo procedimiento de arriba es claro que obtendremos un recorrido que termina en el otro vértice de valencia impar. ■

En la demostración anterior nos topamos con recorridos que "se cierran". Tenemos un concepto que expresa esta situación: Un *ciclo* en una gráfica es un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice (no es necesario que use todos los vértices). Por ejemplo $EC, CD, DE$ es un ciclo en la gráfica que aparece al inicio de estas notas. Una gráfica conexa sin ciclos se llama *árbol*.

**[8.6] Ejercicio.** Probar que si un árbol tiene $v$ vértices ($v \geq 1$) y $a$ aristas, entonces $v - 1 = a$.

Hemos visto aquí algunas generalidades de gráficas. En algunos problemas que aparecen en la sección 13 tendremos oportunidad de utilizar esta herramienta.

*Sección 9*

# Principio de las Casillas

A primera vista el *Principio de las Casillas* (también llamado *Principio de los Palomares*) parece extremadamente simple e inofensivo. Sin embargo tiene muchas aplicaciones en problemas de del tipo que nos interesan en estas notas.

**[9.1] Principio de las Casillas.** Si se dispone de $n$ casillas para colocar $m$ objetos y $m > n$, entonces en alguna casilla deberán colocarse por lo menos dos objetos.

Empezaremos ilustrando con un ejemplo muy simple y típico de aplicación varias veces del Principio de las Casillas.

**[9.2] Ejemplo.** Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

**Solución.** Notemos que si sacáramos 20 canicas, podría ser que

todas fueran de colores distintos, así que sólo podríamos garantizar que hay dos canicas del mismo color si sacáramos 21 canicas (aquí se aplicó el Principio de las Casillas). De la misma manera, necesitaríamos $41(= 20 \times 2 + 1)$ canicas para poder afirmar que con seguridad hay 3 canicas (al menos) del mismo color, pues con 40 canicas podría ser que cada color apareciera exactamente 2 veces. Con el mismo razonamiento que hemos seguido llegamos al resultado: Se necesitan $20 \times 99 + 1 = 1981$ canicas. ■

**[9.3] Ejercicio.** En un papel cuadriculado de $6 \times 9$ cuadrados se consideran 25 triángulos arbitrarios y diferentes que tienen sus vértices en los puntos de intersección de las líneas de la cuadrícula. Mostrar que no importa como se elijan los triángulos, forzosamente habrá (al menos) dos triángulos con (al menos) un vértice en común.

Los siguientes ejemplos son todos de naturaleza muy distinta; sin embargo, en la solución de todos ellos utilizamos el Principio de las Casillas.

**[9.4] Ejemplo.** Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de $3 \times 7$ se pintan de negro y los otros se dejan en blanco. Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo en cuyas cuatro esquinas los cuadraditos tienen el mismo color (los cuatro blancos o los cuatro negros).

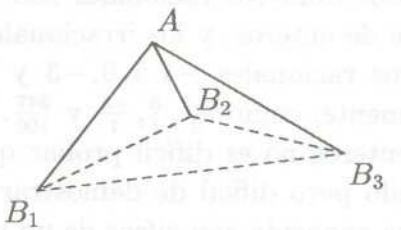
**Solución.** Supongamos que tenemos una cuadrícula pintada de manera tal que no se forma el rectángulo con las esquinas del mismo color. Simbolicemos por $N$ al color negro y por $B$ al color blanco, y observemos que los cuadritos de una columna pueden haber quedado pintados según las siguientes 8 posibilidades: $p_1 = NNN$, $p_2 = NNB$, $p_3 = NBN$, $p_4 = BNN$, $p_5 = NBB$, $p_6 = BNB$, $p_7 = BBN$ y $p_8 = BBB$. Supongamos que una de las columnas está pintada según la posibilidad $p_1$; entonces con cualquiera de las posibilidades en que la columna tiene dos $N$'s se formará un rectángulo con las esquinas negras, así que ninguna columna está pintada así; pero entonces las columnas están sólo pintadas según las posibilidades $p_1, p_5, p_6, p_7$ y $p_8$;

como el número de columnas es 7, entonces el Principio de las Casillas nos dice que debe haber dos columnas iguales, pero aquí también, por el Principio de las Casillas, como son tres cuadritos en cada columna y sólo dos colores, hay un color que se repite, y entonces es obvio que se forma un rectángulo con las esquinas del mismo color. Concluimos entonces que la posibilidad $p_1$ no aparece. Lo mismo ocurre al considerar la posibilidad $p_8$. Entonces ninguna de las posibilidades $p_1$ y $p_8$ aparece; pero así sobran sólo 6 posibilidades, con lo cual, otra vez aplicando el Principio de las Casillas, tenemos dos columnas iguales, y de ahí una contradicción. ■

**[9.5] Ejercicio.** Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de $19 \times 4$ se pintan de rojo, otros de azul y otros de verde (no se deja ninguno en blanco). Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo cuyas cuatro esquinas tienen el mismo color.

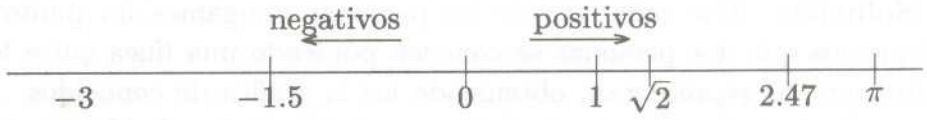
**[9.6] Ejemplo.** Probar que en cualquier conjunto de 6 personas forzosamente hay 3 que se conocen todas entre sí o 3 tales que ninguna conoce a las otras 2.

**Solución.** Por cada una de las personas pongamos un punto e indiquemos que dos personas se conocen poniendo una línea entre los puntos que las representan, obteniendo así la gráfica de conocidos. Si $A$ es una de las personas, las restantes 5 se pueden dividir en dos grupos: las conocidas de $A$ y las desconocidas de $A$. Por el Principio de las Casillas, alguno de los grupos tendrá 3 o más elementos. Primero supongamos que el de los conocidos de $A$ tiene tres o más elementos y sean $B_1$, $B_2$ y $B_3$ conocidos de $A$.



Si dos de $B_1$, $B_2$ y $B_3$ se conocen entre sí, entonces $A$ junto con esos dos formará el grupo de los tres conocidos que buscábamos. Si no, entonces $B_1$, $B_2$ y $B_3$ formarán el grupo de los tres desconocidos que queríamos. El caso en que el número de desconocidos de $A$ sea 3 o más se trata de manera análoga al anterior, considerando tres desconocidos $C_1$, $C_2$ y $C_3$ de $A$. ■

El último ejemplo de esta sección nos servirá, además de para ver una aplicación interesante (y muy simple) del Principio de las Casillas, para recordarnos algunas propiedades importantes de los números. Recordemos que los *números reales* son aquéllos que nos sirven para "medir con dirección", es decir, aquéllos que se pueden representar en una recta una vez que se ha establecido un punto de partida (el 0) y se ha indicado otro punto distinto (el 1) que nos señala precisamente la medida 1 y que la dirección del 0 al 1 es la positiva; así, los números reales del mismo lado del 0 que el 1 son los positivos, mientras que los reales del lado opuesto son los negativos. Entonces tenemos que todo número entero es real, pero hay reales que no son enteros, como por ejemplo $-1.5$, $2.47$, $\sqrt{2}$ y $\pi$.




El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se descompone en dos conjuntos ajenos (es decir, dos conjuntos sin elementos en común): el de los *números racionales* (denotado por $\mathbb{Q}$) y el de los *números irracionales* (denotado por $\mathbb{I}$). Los números racionales son los que se pueden expresar como cociente de enteros, y los irracionales son los que no. Por ejemplo, son números racionales $-1.5, 0, -3$ y $2.47$, pues se pueden expresar, respectivamente, como $\frac{-3}{2}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{-3}{1}$ y $\frac{247}{100}$. Utilizando resultados de divisibilidad de enteros no es difícil probar que $\sqrt{2}$ no es racional. Un resultado conocido pero difícil de demostrar es que $\pi$ tampoco es racional. La escritura conocida con cifras de un número real cualquiera

se llama *expansión decimal* del número (o sea, la expansión decimal del número 23 053.04 es, precisamente, 23 053.04). La razón para esta nomenclatura es que la expresión se basa en un sistema posicional en que en cada posición la cifra (que puede ser cualquier entero entre 0 y 9) representa el número de veces que debe tomarse la potencia de 10 correspondiente a esa posición; por ejemplo:

$$23\,053.04 = 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times \frac{1}{10^2}.$$

No debemos pasar por alto que algunas expansiones decimales son infinitas (después del punto decimal), como por ejemplo la expansión de $\frac{1}{3}$, que consta de una infinidad de 3's. Esto usualmente se representa por $\frac{1}{3} = .\overline{3}$, indicando que el 3 debe repetirse una infinidad de veces. De esta manera, también podemos considerar números reales como $1.2\overline{403}$ en donde, a partir del 2 la repetición es de las tres cifras 403. En los casos que acabamos de considerar en que hay una repetición infinita de cifras, decimos que la expansión de los números es *periódica* y llamamos *periodo* a lo que se repite (en el primer caso el periodo es 3 y en el segundo, el periodo es 403). Podemos decir que las expansiones finitas son periódicas con periodo 0 (por ejemplo, $2.4 = 2.4\overline{0}$). Es importante notar que hay números reales que no tienen expansión periódica, como por ejemplo el número .1010010001..., en el que después del punto los 1's están intercalados entre cada vez más 0's. No es difícil probar que: *Si un número real tiene una expansión periódica, entonces el número es racional:* Si el número se llama $x$, lo podemos multiplicar por potencias apropiadas de 10, de tal manera que al restar una de otra se elimine el periodo, y después despejar $x$ de una expresión de enteros (por ejemplo, si $x = 3.8\overline{25}$, entonces $10^3x - 10x = 3825.\overline{25} - 38.\overline{25} = 3787$, así que $x = \frac{3787}{990}$). El contenido del siguiente ejemplo, que demostraremos utilizando el Principio de las Casillas, es, precisamente, el recíproco de este resultado.

**[9.7] Ejemplo.** Probar que la expansión decimal de cualquier número racional es periódica.

**Solución.** Sea $\frac{a}{b}$ el número considerado, donde $a$ y $b$ son enteros y

$b \neq 0$. Al hacer la división según el algoritmo usual, los residuos que van quedando son enteros entre 0 y $b-1$, así que forzosamente deberá haber alguna repetición; a partir de ese momento, los cocientes y los residuos que se van obteniendo van formando un periodo de repetición. ■

**[9.8] Ejercicio.** En un congreso internacional se reúnen $n$ científicos de 6 países. Durante el congreso los científicos se dividen en cuatro secciones de tal manera que dentro de cualquier grupo de 6 participantes de la misma sección siempre hay dos científicos de la misma edad. Encuentra el mínimo número $n$ para el cual, bajo las condiciones mencionadas arriba, se puede asegurar que existen tres científicos de una misma sección que tienen la misma edad y pertenecen al mismo país.

*Sección 10*

# Separadores

Ilustraremos la técnica de los *separadores* analizando el siguiente ejemplo.

**[10.1] Ejemplo.** ¿De cuántas formas pueden comprarse 20 galletas de una tienda que vende galletas de 5 sabores?

**Solución.** Supongamos que los sabores de las galletas son: vainilla ($V$), chocolate ($C$), nuez ($N$), azúcar ($A$) y mantequilla ($M$). Cada colección de 20 galletas puede representarse por 24 casillas ($-$) en las que se han puesto 4 separadores ($|$); las casillas que quedan entre los separadores nos dicen el número de galletas de cada tipo; por ejemplo, la collección de 4 $V$'s, 1 $C$, 0 $N$'s, 10 $A$'s y 5 $M$'s se representa por

$$----|-||----------|-----.$$

Recíprocamente, una sucesión tal de casillas con separadores representa una colección de galletas. Entonces el resultado es de $\binom{24}{4}$. ■

El ejemplo [10.1] es un caso particular de la siguiente situación: *Dados números naturales $r$ y $N$, ¿cuántas $r$-adas $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ se pueden encontrar de tal manera que $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = N$?* Como vimos en el ejemplo, la respuesta de esta pregunta se puede encontrar con separadores y es $\binom{N+r-1}{r-1}$.

**[10.2] Ejercicio.** Decir cuántos términos tiene la expansión de $(a+b+c)^5$ y de qué forma son.

Consideremos ahora la misma situación planteada después del ejemplo [10.1] pero pidiendo ahora que los números $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sean enteros positivos. Este ejemplo podría resolverse también con separadores, pero en esta ocasión se pondrían $N$ casillas y los separadores deberían colocarse en los espacios que quedan entre las casillas. Sin embargo, esta misma situación puede resolverse basándose en la anterior. Explicaremos esto con más detalle, generalizando aún más la situación, en la siguiente proposición.

**[10.3] Proposición.** Dados naturales $r$ y $N$, el número de $r$-adas $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de enteros $a_1, a_2, \ldots, a_r$ que satisfacen $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = N$ sujetos a la restricción: $a_1 \geq k_1$, $a_2 \geq k_2, \ldots$, $a_r \geq k_r$, donde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son enteros dados, es

$$\binom{N - (k_1 + k_2 + \cdots + k_r) + r - 1}{r-1}.$$

**Demostración.** Para $i = 1, 2, \ldots, r$, seá $b_i = a_i - k_i$. Observemos que entonces $b_i \geq 0$ y que la condición $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = N$ es equivalente a $b_1 + b_2 + \cdots + b_r = N - (k_1 + k_2 + \cdots + k_r)$. Entonces el problema se ha reducido al que ya sabíamos resolver y la respuesta es la indicada en el enunciado de la proposición. ■

**[10.4] Ejemplo.** ¿De cuántas formas pueden escogerse 8 enteros $a_1, a_2, \ldots, a_8$, no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$?

**Solución.** *Primera forma.* Hagamos la cuenta según cuántos grupos $i$ de números iguales hay ($i = 1, 2, \ldots, 8$). Por ejemplo, algunas sucesiones de enteros que tienen $i = 3$ son $(1,1,4,4,4,4,4,7)$, $(3,3,3,3,3,3,6,8)$ y $(5,5,5,6,6,6,7,7)$. Para contar de qué formas se pueden poner $i$ grupos, hay que poner $i-1$ separadores en los 7 huecos que hay en 8 casillas; en los ejemplos de arriba las posiciones respectivas de los separadores serían $--|-----|-$, $-------|-|-$ y $---|---|--$; entonces las formas de poner los separadores son $\binom{7}{i-1}$. Una vez elegida la posición de los separadores hay que escoger los $i$ enteros del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (y después ponerlos en orden de magnitud; en los ejemplos, los subconjuntos elegidos fueron, respectinvamente $\{1,4,7\}$, $\{3,6,8\}$ y $\{5,6,7\}$); esto se puede hacer de $\binom{8}{i}$. Entonces la respuesta es

$$\binom{7}{0}\binom{8}{1} + \binom{7}{1}\binom{8}{2} + \binom{7}{2}\binom{8}{3} + \cdots + \binom{7}{7}\binom{8}{8}.$$

*Segunda forma.* Pongamos 15 casillas y marquemos 8 lugares, de manera que $a_1$ esté representado por 1 más el número de casillas hasta la primera marca; $a_2$ esté representado por $a_1$ más el número de casillas hasta la segunda marca, y así sucesivamente, hasta $a_8$ que estará representado por $a_7$ más el número de espacios hasta la octava marca. Entonces la respuesta es $\binom{15}{8}$.

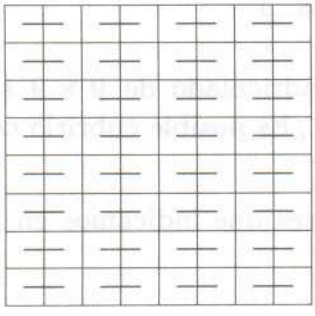
De lo probado en este ejemplo es fácil (ver la sección 3 sobre comparaciones) deducir la fórmula de números naturales $n$:

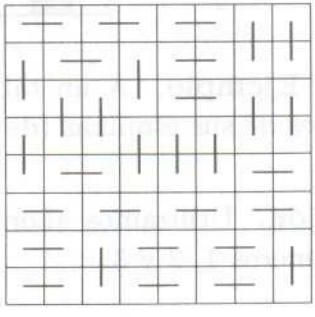
$$\binom{n}{0}\binom{n+1}{1} + \binom{n}{1}\binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}. \quad \blacksquare$$

*Sección 11*

# Coloración

En varios de los problemas de esta sección se estudia la posibilidad de *cubrir* tableros de un determinado tamaño o forma con fichas que cumplen ciertas características. Se entiende que las fichas no deben traslaparse ni cubrir área fuera del tablero. Se pide además que entre todas las fichas se tape todo el tablero. Para ilustrar, consideremos el caso de cubrir un tablero de $8 \times 8$ con fichas de tamaño $2 \times 1$. Es muy fácil lograrlo y en la figura esquematizamos 2 formas de hacerlo.

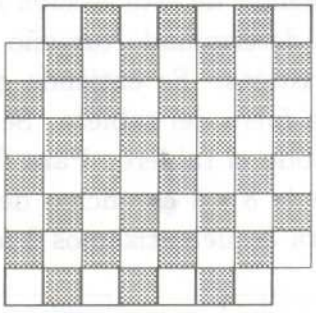




Desde luego, el ejemplo anterior fue muy sencillo y no tuvo ningún interés teórico. Sin embargo una ligera variación lo vuelve mucho más interesante, como veremos a continuación.

**[11.1] Ejemplo.** Utilizando fichas de tamaño $2 \times 1$, ¿es posible cubrir un tablero de $8 \times 8$ del que se han quitado dos esquinas opuestas (de $1 \times 1$)?

**Solución.** Podríamos hacer muchos intentos sin lograr cubrir el tablero; sin embargo esto no nos demostraría que no es posible. Utilizamos un argumento ingenioso: pintar el tablero como si fuera un tablero de ajedrez (alternando los colores blanco y negro). Observamos entonces que a las dos esquinas que se eliminaron les correspondía el mismo color, así que quedaron más cuadros de un color que de otro. Por otro lado, sin importar el lugar donde se coloquen las fichas de $2 \times 1$, cada una de ellas cubre un cuadro negro y uno blanco así que, si se pudiera cubrir el tablero, el número de cuadros blancos cubierto sería el mismo que el de negros. Este argumento demuestra que no es posible cubrir el tablero. ■



**[11.2] Ejemplo.** A un tablero cuadriculado de $9 \times 9$ se le han quitado tres de sus esquinas (de $1 \times 1$). ¿Es posible cubrirlo con fichas de $3 \times 1$?

**Solución.** Utilizamos ahora 3 colores que indicamos en la figura con los números 1, 2 y 3.

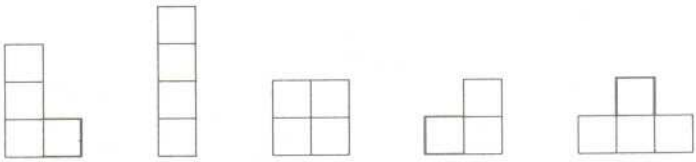
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | |

En este caso, cualquier colocación de las fichas de $1 \times 3$ cubre una vez cada uno de los colores, así que en la coloración debería haber la misma cantidad de cuadros de cada color; pero esto no es cierto ya que en la cuadrícula de $9 \times 9$ sí había la misma cantidad de cuadros de cada color, pero a dos de los tres cuadros que se quitaron les correspondía el mismo color (el 1). (notemos que hay que escoger la coloración en forma adecuada; por ejemplo, si se hubiera quitado la esquina inferior izquierda en lugar de la derecha, la coloración dada no serviría pues se quitaría un cuadro de cada color, en ese caso hubiera convenido comenzar el segundo renglón con el color 2 y después seguir alternando de la misma manera.) ■

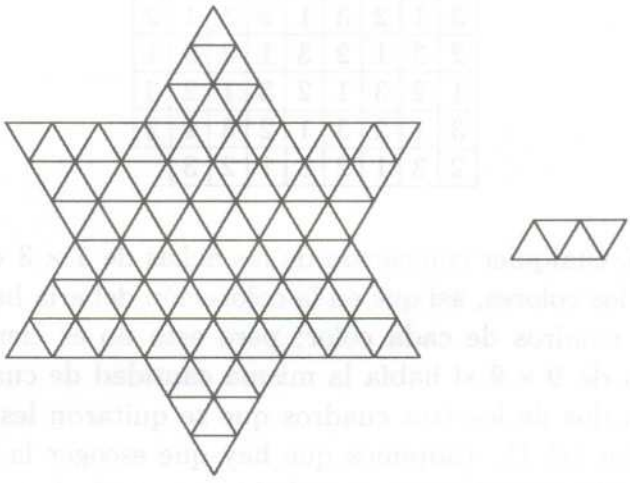
## Ejercicios

**[11.3]** Rehacer el ejemplo [11.2] utilizando sólo dos colores.

**[11.4]** ¿Es posible construir un rectángulo con las cinco fichas que se muestran a continuación (todos los cuadritos marcados son de $1 \times 1$)?



**[11.5]** La estrella que se muestra abajo consta de 108 triángulos equiláteros iguales. ¿Es posible cubrirla con fichas de 4 triángulos equiláteros (del mismo tamaño que los de la estrella) como la que se muestra al lado de la estrella?



**[11.6]** Se considera la gráfica (ver la sección 8) dibujada sobre la superficie de un cubo como sigue: los vértices son los vértices del cubo y los puntos medios de las caras del cubo; las aristas son los segmentos que unen cada punto medio de una cara con los 4 vértices del cubo que forman esa cara. ¿Es posible hacer un recorrido que pase exactamente una vez por cada uno de los vértices de la gráfica?

*Sección 12*

# Problemas Dinámicos

Trataremos aquí algunos problemas clásicos de tipo dinámico, es decir, en los que una determinada situación va cambiando en el problema mediante pasos sucesivos.

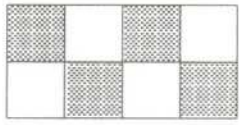
**[12.1] Ejemplo.** En las casillas de una cuadrícula de $2 \times 4$ están escritos los números 0 y 1 como se indica en la figura.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Se va aplicar la siguiente operación: *A dos casillas que compartan un lado se les puede sumar o restar la misma cantidad.* Aplicando esta operación las veces que se quiera, ¿es posible llevar todos los números en la cuadrícula a 0's?

**Solución.** Coloreemos los cuadros de la cuadrícula en forma alter-

nada, como en un tablero de ajedrez, y en cada momento consideremos la diferencia entre la suma de los números que aparecen en las casillas negras y la suma de los que aparecen en las casillas blancas.



Observamos entonces que la operación permitida no altera esta diferencia pues se le suma o resta la misma cantidad a una casilla negra y a una blanca. Como la diferencia al principio es 2 y la diferencia en la posición en que todos los números son 0 es 0, concluimos que no es posible. ■

Como pudimos observar en el ejemplo anterior, lo importante fue darse cuenta de qué se mantiene *invariante* a lo largo del problema. Tratemos otro ejemplo de este estilo.

**[12.2] Ejemplo.** Dada una lista de 0's y 1's le podemos aplicar la operación siguiente: *Se escogen dos números $a$ y $b$ de la lista, se borran y se agrega a la lista el número 0 si $a = b$, y 1 si $a \neq b$.* Se repite esta operación hasta quedarse con un solo número. Determinar cómo debe ser la lista para terminar con un 1.

**Solución.** Consideremos la cantidad $C$ de 1's que hay en un momento determinado, y la cantidad $C'$ de 1's que hay después de haber aplicado la operación una vez. Observamos que la paridad de $C$ y la de $C'$ es la misma (es decir, que si $C$ es par o impar, entonces también lo es $C'$). Entonces, la condición necesaria y suficiente para obtener un solo 1 al final es haber iniciado con una cantidad impar de 1's. ■

En los dos ejemplos siguientes consideraremos problemas dinámicos en los que lo importante es darse cuenta que una situación no puede cambiar indefinidamente.

**[12.3] Ejemplo.** De un grupo de personas se sabe que cada una de ellas tiene a lo más 3 amigos dentro del grupo. Probar que se pueden separar en dos grupos de tal manera que en cada grupo cada persona tenga a lo más un amigo.

**Solución.** Dividamos de cualquier forma las personas en dos grupos y consideremos, para cada persona $A$, el número $p(A)$ de amigos de $A$ dentro del mismo grupo que $A$ (entonces $p(A) \leq 3$). Analicemos la suma total de todos los $p(A)$'s. Si algún $p(A) > 1$, entonces cambiemos $A$ de grupo. De esta manera, la suma de todos los $p(A)$ disminuye con respecto a la anterior. Volvemos a repetir el procedimiento mientras haya algún $p(A) > 1$. Como la suma es siempre un entero mayor o igual que 0, el procedimiento no puede continuar indefinidamente; esto quiere decir que en algún momento todos los $p(A)$ serán a lo más 1, que es lo que buscábamos. ■

**[12.4] Ejemplo.** A una lista de números enteros se le aplica la siguiente operación: *Cada número se cambia por el número de veces que ese mismo número aparece en la lista.* Esta operación se aplica sucesivamente. Por ejemplo, a continuación se puso por renglones cómo iría cambiando la lista de números que aparece en el primer renglón:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 5 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 4 | 4 | 1 |
| 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 6 |
| 4 | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 6 |

Probar que en algún momento la lista queda invariante (es decir, permanece sin cambios, como ocurre en el ejemplo a partir del cuarto paso).

**Solución.** Supongamos que la lista consta inicialmente de $n$ números (posiblemente algunos de ellos repetidos). Observamos que a partir de la segunda vez que se aplica la operación, cada número se sustituye por uno mayor o igual que él (pues, por ejemplo, si un número aparecía 3 veces, se escribe 3 abajo de ese número, así que el 3 se repite por lo

menos 3 veces y en el siguiente renglón el 3 se sustituirá por algo mayor o igual que 3). Como lo máximo que se puede escribir en cada lugar es $n$ (pues hay $n$ números), entonces el procedimiento no puede continuar indefinidamente produciendo números distintos. En el momento que una lista es igual que la anterior, la lista ya queda invariante. ■

El siguiente ejemplo trata de un juego famoso. Para estudiar su solución conviene que recordemos en qué consiste la *expansión binaria* o *expansión en base 2* de un número. En la sección 9 recordamos que la expansión decimal (o en base 10) de un número es la que nos dice cuántas unidades, decenas, centenas, etc., se toman del número. Así el número 1081 tiene 1 unidad, 8 decenas, y 1 millar:

$$1081 = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 8 \times 10 + 1.$$

En cada caso, los números que se toman son enteros del 0 al 9 (pues, por ejemplo, 10 decenas se considera como una centena). La expansión binaria de un número determina cada una de las potencias de 2 que forman al número y, en este caso, cada potencia de 2 se toma 0 o 1 vez. El mismo número del ejemplo, 1081, tiene expansión binaria

$$1\times2^{10}+0\times2^9+0\times2^8+0\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2+1.$$

(No es difícil darse cuenta que todo número tiene expansión binaria; por ejemplo, para encontrar la expansión binaria de 1081 se busca la potencia de 2 más cercana menor que el número: $2^{10}$ y se resta del número: $1081 - 2^{10} = 57$; así sucesivamente.) Utilizamos también la notación posicional, escribiendo un 2 pequeño como subíndice para expresar que se considera la expansión binaria del número; así: $1081 = 10000111001_2$.

En buena parte, las operaciones que estamos acostumbrados a realizar con números usando su expansión decimal pueden efectuarse de la misma manera usando la expansión binaria. Dejamos como ejercicio los detalles de esto.

**[12.5] Ejercicio.** Determinar qué tipo de expansión binaria tienen

los números pares.

**[12.6] Ejercicio.** Efectuar las operaciones: $1100101_2 + 100011_2$ y $1100101_2 \times 100011_2$ en base 2.

**[12.7] Ejercicio.** Determinar cuándo un número es mayor que otro según su expansión binaria.

La expansión binaria nos apoyará para resolver el siguiente ejemplo, en el que además estudiaremos lo que significa tener o no *estrategia ganadora* en un juego.

**[12.8] Ejemplo.** En el juego del *nim* hay varios montones de fichas. El juego se juega entre dos personas que alternan turnos. En cada turno un jugador debe quitar tantas fichas como desee de alguno de los montones (sólo de uno de los montones y por lo menos una). La persona que quite la última ficha gana. Determinar si hay estrategia ganadora; es decir si una de las personas puede establecer una forma de jugar mediante la cual, sin importar cómo juegue la otra persona, ella siempre gane.

**Solución.** Debemos primero entender bien qué significa *estrategia ganadora*. En cada momento del juego las fichas quedan en una posición determinada. Consideramos que el conjunto de posiciones se divide en dos: *ganadoras* y *perdedoras*. Desde luego, en el caso de este juego, cuando un jugador se encuentra con un solo montón de fichas en su turno, entonces tiene una posición ganadora, pues en ese mismo turno puede recoger todas y ganar. Sin embargo, hay otras posiciones a lo largo del juego que cuando se le presentan a un jugador éste puede forzar el juego para terminar ganando; a ésas les llamamos posiciones ganadoras, es decir: *Una posición es ganadora si se le presenta a una persona en un turno y ésta puede ganar en ese momento o dejar una posición perdedora para el jugador contrario; una posición es perdedora si el jugador debe forzosamente dejar una posición ganadora al otro jugador.* En el ejemplo, determinemos las posiciones perdedoras y las ganadoras utilizando expansión binaria como sigue: Escribamos la

cantidad de fichas que hay en cada montón en base 2, y sumemos en base 10 los dígitos de cada posición en la expansión binaria (es decir, para cada $n \geq 0$ sumamos los coeficientes de $2^n$). Por ejemplo, si en algún momento del juego se tuvieran 12 montones con 9, 9, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 3, 3, 2 y 1 fichas, respectivamente, al escribir estos números en base 2 tendríamos: 1001, 1001, 111, 111, 111, 111, 111, 100, 11, 11, 10 y 1, y las sumas de los dígitos serían 2, 6, 8 y 10. Afirmamos que las posiciones perdedoras son aquéllas en las que todas las sumas son pares (como en este caso), es decir, el jugador que se encuentre con una posición de este tipo, sin importar cómo juegue dejará al otro jugador una posición del otro tipo (o sea, una posición en que por lo menos una de las sumas es impar), con la cual está en peligro de perder si el otro jugador juega correctamente. En efecto, empecemos por observar que la posición en que sólo hay un montón, alguno de los dígitos debe ser 1, así que no todas las sumas son pares y es una posición obviamente ganadora (el jugador que encuentra esta posición, gana). Por otro lado, si a un jugador se le presenta una situación en la que todas las sumas son pares, entonces al quitar cualquier número de fichas de cualquier montón, altera al menos uno de los dígitos (en base 2) del montón, así que la nueva suma en el lugar de ese dígito alterado queda impar. El jugador que tenga una posición en la que las sumas no sean todas pares, puede quitar un número de fichas que sí deje sólo sumas pares; para lograrlo encuentra la primera columna de la izquierda que produce una suma impar y se fija en un montón que contribuya en 1 a esa columna; de ese montón quita el número de fichas necesario para obtener puras sumas pares (conviene practicar con algunos ejemplos para que esto quede claro). Entonces, la estrategia ganadora consiste en dejar siempre al otro jugador en una posición en que todas las sumas sean pares. ■